SOLUCIÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA
ECUACIONES DIFERENCIALES
SEMESTRE 2011-1
PRIMER EXAMEN PARCIAL

2010 SEPTIEMBRE 6

> $restart:$

INICIA SOLUCIÓN 1)

> $EcuacionDiferencial := x \cdot diff(y(x), x) \cdot \cdot 2 - 2 \cdot y(x) \cdot diff(y(x), x) = -4 \cdot x;$

$$EcuacionDiferencial := x \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2 - 2\, y(x) \left(\frac{d}{dx} y(x)\right) = -4\, x \qquad \textbf{(1)}$$

> **_C:**

inciso a) LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ES ORDINARIA DE PRIMER ORDEN SEGUNDO GRADO Y NO LINEAL **(EDO(1)(G=2)NL)**

> $funcion_1 := y(x) = \_C1 \cdot x \cdot \cdot 2 + \_C1; funcion_2 := y(x) = \frac{x \cdot \cdot 2}{\_C1} + \_C1; funcion_3 := y(x) = \frac{x \cdot \cdot 2}{\_C1} + \frac{1}{\_C1}; funcion_4 := y(x) = \frac{x \cdot \cdot 2}{5} + 5; funcion_5 := y(x) = \frac{x \cdot \cdot 2}{3} + \frac{1}{3}; funcion_6 := y(x) = -x \cdot \cdot 2 + -1; funcion_7 := y(x) = -2 \cdot x \cdot \cdot 2 - 2; funcion_8 := y(x) = -2 \cdot x; funcion_9 := y(x) = -4 \cdot x; funcion_{10} := y(x) = 2 \cdot x;$

$$funcion_1 := y(x) = \_C1\, x^2 + \_C1$$

$$funcion_2 := y(x) = \frac{x^2}{\_C1} + \_C1$$

$$funcion_3 := y(x) = \frac{x^2}{\_C1} + \frac{1}{\_C1}$$

$$funcion_4 := y(x) = \frac{1}{5} x^2 + 5$$

$$funcion_5 := y(x) = \frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{3}$$

$$funcion_6 := y(x) = -x^2 - 1$$

$$funcion_7 := y(x) = -2\, x^2 - 2$$

$$funcion_8 := y(x) = -2\, x$$

$$funcion_9 := y(x) = -4\, x$$

$$funcion_{10} := y(x) = 2\, x \qquad \textbf{(2)}$$

>

inciso b) VERIFICAR

> $funcion_1;$

$$y(x) = \_C1\, x^2 + \_C1 \qquad \textbf{(3)}$$

> $comprobacion_1 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_1), lhs(EcuacionDiferencial) - rhs(EcuacionDiferencial) = 0)));$

(4)

$$comprobacion_1 := -4\ \_C1^2\ x + 4\ x = 0 \tag{4}$$

LA funcion_1 **NO ES SOLUCIÓN**

> $funcion_2;$

$$y(x) = \frac{x^2}{\_C1} + \_C1 \tag{5}$$

> $comprobacion_2 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_2), lhs(EcuacionDiferencial) - rhs(EcuacionDiferencial) = 0)));$

$$comprobacion_2 := 0 = 0 \tag{6}$$

LA funcion_2 ES LA **SOLUCIÓN GENERAL** PUES SATISFACE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL Y ADEMÁS TIENE UN SÓLO PARÁMETRO PARA UNA ECUACIÓN DE PRIMER ORDEN.

> $funcion_3;$

$$y(x) = \frac{x^2}{\_C1} + \frac{1}{\_C1} \tag{7}$$

> $comprobacion_3 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_3), lhs(EcuacionDiferencial) - rhs(EcuacionDiferencial) = 0)));$

$$comprobacion_3 := \frac{4\ x\ (-1 + \_C1^2)}{\_C1^2} = 0 \tag{8}$$

LA funcion_3 **NO ES SOLUCIÓN**

> $funcion_4;$

$$y(x) = \frac{1}{5}\ x^2 + 5 \tag{9}$$

> $comprobacion_4 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_4), lhs(EcuacionDiferencial) - rhs(EcuacionDiferencial) = 0)));$

$$comprobacion_4 := 0 = 0 \tag{10}$$

> $comprobacion_{40} := solve(rhs(funcion_4) = rhs(funcion_2), \_C1);$

$$comprobacion_{40} := 5, \frac{1}{5}\ x^2 \tag{11}$$

> $Parametro_4 := comprobacion_{40}[1];$

$$Parametro_4 := 5 \tag{12}$$

LA funcion_4 ES UNA **SOLUCIÓN PARTICULAR** DADO QUE SATISFACE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL Y ADEMÁS EL PARÁMETRO DE LA SOLUCIÓN GENERAL TOMA EL VALOR DE 5

> $funcion_5;$

$$y(x) = \frac{1}{3}\ x^2 + \frac{1}{3} \tag{13}$$

> $comprobacion_5 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_5), lhs(EcuacionDiferencial) - rhs(EcuacionDiferencial) = 0)));$

$$comprobacion_5 := \frac{32}{9}\ x = 0 \tag{14}$$

LA funcion_5 **NO ES SOLUCIÓN**

> $funcion_6;$

$$y(x) = -x^2 - 1 \tag{15}$$

> $comprobacion_6 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_6), lhs(EcuacionDiferencial) - rhs(EcuacionDiferencial) = 0)));$

$$comprobacion_6 := 0 = 0 \tag{16}$$

> $comprobacion_{60} := solve(rhs(funcion_6) = rhs(funcion_2), \_C1);$

$$comprobacion_{60} := -1, -x^2 \tag{17}$$

> $Parametro_6 := comprobacion_{60}[1];$

$$Parametro_6 := -1 \tag{18}$$

LA funcion_6 ES UNA **SOLUCIÓN PARTICULAR** DADO QUE SATISFACE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL Y ADEMÁS EL PARÁMETRO DE LA SOLUCIÓN GENERAL TOMA EL VALOR DE - 1

> $funcion_7;$

$$y(x) = -2x^2 - 2 \tag{19}$$

> $comprobacion_7 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_7), lhs(EcuacionDiferencial) - rhs(EcuacionDiferencial) = 0)));$

$$comprobacion_7 := -12x = 0 \tag{20}$$

LA funcion_7 **NO ES SOLUCIÓN**

> $funcion_8;$

$$y(x) = -2x \tag{21}$$

> $comprobacion_8 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_8), lhs(EcuacionDiferencial) - rhs(EcuacionDiferencial) = 0)));$

$$comprobacion_8 := 0 = 0 \tag{22}$$

> $comprobacion_{80} := solve(rhs(funcion_8) = rhs(funcion_2), \_C1);$

$$comprobacion_{80} := -x, -x \tag{23}$$

LA funcion_8 ES UNA **SOLUCIÓN SINGULAR** DADO QUE SATISFACE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PERO NO EL PARÁMETRO DE LA SOLUCIÓN GENERAL NO TOMA NINGÚN VALOR REAL

> $funcion_9;$

$$y(x) = -4x \tag{24}$$

> $comprobacion_9 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_9), lhs(EcuacionDiferencial) - rhs(EcuacionDiferencial) = 0)));$

$$comprobacion_9 := -12x = 0 \tag{25}$$

LA funcion_9 **NO ES SOLUCIÓN**

> $funcion_{10};$

$$y(x) = 2x \tag{26}$$

> $comprobacion_{10} := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_{10}), lhs(EcuacionDiferencial) - rhs(EcuacionDiferencial) = 0)));$

$$comprobacion_{10} := 0 = 0 \tag{27}$$

> $comprobacion_{100} := solve(rhs(funcion_{10}) = rhs(funcion_2), \_C1);$

$$comprobacion_{100} := x, x \tag{28}$$

LA funcion_10 **ES UNA SOLUCIÓN SINGULAR** DADO QUE SATISFACE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PERO NO EL PARÁMETRO DE LA SOLUCIÓN GENERAL NO TOMA NINGÚN VALOR REAL

>

COMPROBACIÓN FINAL

> $SolucionFinal := dsolve(EcuacionDiferencial) : SolucionFinal[1]; SolucionFinal[2];$
> $subs\left(\_C1 = \frac{\_C1}{2}, expand(SolucionFinal[3])\right);$

$$y(x) = -2x$$

$$y(x) = 2x$$

$$y(x) = \frac{x^2}{\_C1} + \_C1 \tag{29}$$

SE PUEDE OBSERVAR QUE: LA SolucionFinal[3] ES TOTALMENTE EQUIVALENTE A LA funcion_2 Y QUE ES LA SOLUCIÓN GENERAL ÚNICA; POR OTRA PARTE LA SolucionFinal[1] ES EQUIVALENTE A LA funcion_8 Y que la SolucionFinal[2] ES EQUIVALENTE A LA funcion_10 POR LO QUE AMBAS SON SINGULARES.

> *restart* :

FIN DE LA SOLUCIÓN 1)

> **_C:**

INICIA LA SOLUCION 2)

> $SolucionGeneral := y(x) = \_C1 \cdot \exp(2 \cdot x) + \_C2 \cdot x \cdot \exp(2 \cdot x) + 15 \cdot x \cdot \cdot 2 \cdot \exp(2 \cdot x);$

inciso a) OBTENER LA ECUACIÓN CORRESPONDIENTE

> $Sistema := diff(SolucionGeneral, x), diff(SolucionGeneral, x\$2) : Sistema[1]; Sistema[2];$

$$\frac{d}{dx} y(x) = 2\,\_C1\, e^{2x} + \_C2\, e^{2x} + 2\,\_C2\, x\, e^{2x} + 30\, x\, e^{2x} + 30\, x^2\, e^{2x}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = 4\,\_C1\, e^{2x} + 4\,\_C2\, e^{2x} + 4\,\_C2\, x\, e^{2x} + 30\, e^{2x} + 120\, x\, e^{2x} + 60\, x^2\, e^{2x} \tag{30}$$

> $Parametros := solve(\{Sistema\}, \{\_C1, \_C2\});$

$$Parametros := \left\{\_C1 = \frac{1}{4}\,\frac{1}{e^{2x}}\left(-\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + 60\,x\,e^{2x} + 30\,e^{2x} + 4\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) - 2\,x\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + 60\,x^2\,e^{2x} + 4\,x\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)\right), \_C2 = -\frac{1}{2}\,\frac{-\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + 60\,x\,e^{2x} + 30\,e^{2x} + 2\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)}{e^{2x}}\right\} \tag{31}$$

> $Ecuacion_1 := simplify(eval(subs(\_C1 = rhs(Parametros[1]), \_C2 = rhs(Parametros[2]), SolucionGeneral)));$

$$Ecuacion_1 := y(x) = -\frac{1}{4}\,\frac{d^2}{dx^2}y(x) + \frac{15}{2}\,e^{2x} + \frac{d}{dx}y(x) \tag{32}$$

> $Ecuacion_2 := lhs(Ecuacion_1)\cdot 4 - rhs(Ecuacion_1)\cdot 4 = 0;$

$$Ecuacion_2 := 4\,y(x) + \frac{d^2}{dx^2}\,y(x) - 30\,e^{2x} - 4\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = 0 \tag{33}$$

> $EcuacionFinal := lhs(Ecuacion_2) + 30\cdot\exp(2\cdot x) = rhs(Ecuacion_2) + 30\cdot\exp(2\cdot x);$

$$EcuacionFinal := 4\,y(x) + \frac{d^2}{dx^2}\,y(x) - 4\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = 30\,e^{2x} \tag{34}$$

inciso b) DÉ SU CLASIFICACIÓN: ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA DE SEGUNDO ORDEN LINEAL DE COEFICIENTES CONSTANTES NO HOMOGÉNEA **(EDO(2)LccNH)**

> *restart* :

FIN DE LA SOLUCIÓN 2)

> **_C:**

INICIA SOLUCION 3)

> $EcuacionDiferencial := 2\cdot x\cdot\cdot 2 + y(x) + (x\cdot\cdot 2\cdot y(x) - x)\cdot diff(y(x), x) = 0;$

$$EcuacionDiferencial := 2\,x^2 + y(x) + \left(x^2\,y(x) - x\right)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = 0 \tag{35}$$

> $with(DEtools):$

> $FactorIntegrante := intfactor(EcuacionDiferencial);$

$$FactorIntegrante := \frac{1}{x^2} \tag{36}$$

> $M(x, y) := 2\cdot x\cdot\cdot 2 + y;$

$$M(x, y) := 2\,x^2 + y \tag{37}$$

> $N(x, y) := x^2\,y - x;$

$$N(x, y) := x^2\,y - x \tag{38}$$

> $MM(x, y) := expand(FactorIntegrante\cdot M(x, y));$

$$MM(x, y) := 2 + \frac{y}{x^2} \tag{39}$$

> $NN(x, y) := expand(FactorIntegrante\cdot N(x, y));$

$$NN(x, y) := y - \frac{1}{x} \tag{40}$$

> $comprobacion_1 := diff(MM(x, y), y) - diff(NN(x, y), x) = 0;$

$$comprobacion_1 := 0 = 0 \tag{41}$$

YA ES UNA ECUACION DIFERENCIAL EXACTA

> $IntMM := int(MM(x, y), x);$

$$IntMM := 2\,x - \frac{y}{x} \tag{42}$$

> $SolucionGeneral := IntMM + int((NN(x, y) - diff(IntMM, y)), y) = \_C1;$

$$SolucionGeneral := 2\,x - \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\,y^2 = \_C1 \tag{43}$$

> $parametro := subs(x = 1, y = -2, SolucionGeneral);$

$$parametro := 6 = \_C1 \tag{44}$$

> $SolucionParticular := subs(\_C1 = lhs(parametro), SolucionGeneral);$

(45)

$$SolucionParticular := 2\,x - \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\,y^2 = 6 \qquad \textbf{(45)}$$

> $restart:$

FIN DE LA SOLUCIÓN 3)

> **_C:**

INICIA SOLUCIÓN 4)

> $Ecuacion := \exp(-t)\cdot diff(s(t),t) - s(t) = 1;$

$$Ecuacion := e^{-t}\left(\frac{d}{dt}\,s(t)\right) - s(t) = 1 \qquad \textbf{(46)}$$

inciso a) OBTENGA SU SOLUCIÓN GENERAL

> $SolucionGeneral := dsolve(Ecuacion);$

$$SolucionGeneral := s(t) = -1 + e^{e^t}\,\_C1 \qquad \textbf{(47)}$$

inciso b) GRAFIQUE para

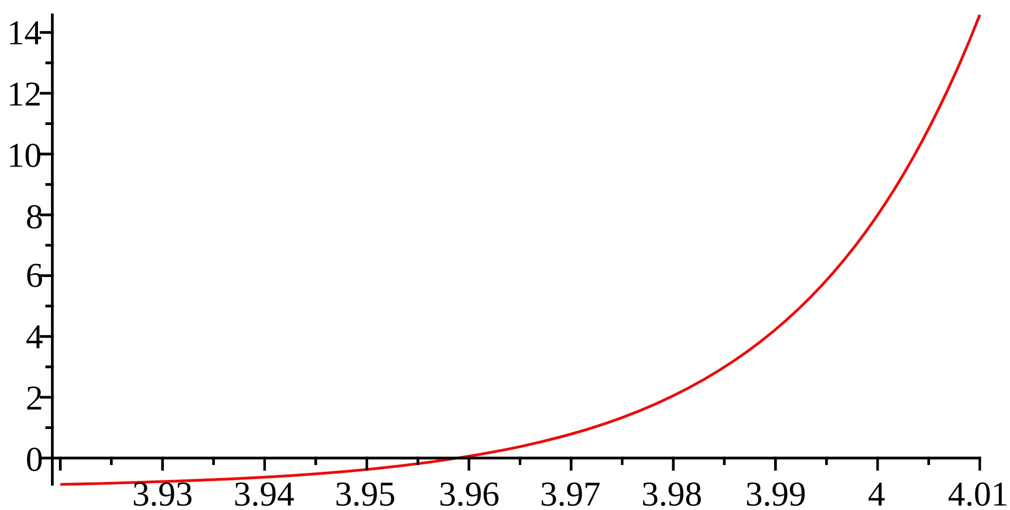
> $Condicion := s(4) = 8;$

$$Condicion := s(4) = 8 \qquad \textbf{(48)}$$

> $SolucionParticular_1 := dsolve(\{Ecuacion, Condicion\});$

$$SolucionParticular_1 := s(t) = -1 + \frac{9\,e^{e^t}}{e^{e^4}} \qquad \textbf{(49)}$$

> $plot(rhs(SolucionParticular_1),\ t = 3.92\,..4.01);$



inciso c)

> $SolucionParticular_2 := subs(\_C1 = 5, SolucionGeneral);$

$$SolucionParticular_2 := s(t) = -1 + 5\,e^{e^t} \qquad \textbf{(50)}$$

> $Valor_{Incognita} := evalf\left(subs\left(t = 1, rhs\left(SolucionParticular_2\right)\right), 15\right);$

$$Valor_{Incognita} := 74.7713112073965 \qquad \textbf{(51)}$$

> $restart:$

FIN DE LA SOLUCIÓN 4)

>

FIN DEL EXAMEN