SOLUCIÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA
ECUACIONES DIFERENCIALES
SEMESTRE 2011-1
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

2010 OCTUBRE 25

> *restart*

1) (30/100)
DADA LA SIGUIENTE SOLUCIÓN GENERAL DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DESCONOCIDA

>

$$y(x) = \_C1\, e^{2x}\cos(3x) + \_C2\, e^{2x}\sin(3x) + e^{2x}x\cos(3x) + e^{2x}x\sin(3x) \tag{1}$$

a) (10/100 puntos) OBTENGA LA SOLUCIÓN PARTICULAR DADAS LAS CONDICIONES INICIALES

>

$$y(0) = -3$$
$$y\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -3 \tag{2}$$

>

b) (5/100 puntos) GRAFIQUE LA SOLUCION PARTICULAR OBTENIDA EN EL INCISO a) PARA DADO INTERVALO EN LAS CONDICIONES DE FRONTERA DEL MISMO INCISO.
c) (15/100 puntos) OBTENGA SU ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA CORRESPONDIENTE.

RESPUESTA 1) a)

> *restart*

> $SolucionNoHomogenea := y(x) = \_C1\, e^{2x}\cos(3x) + \_C2\, e^{2x}\sin(3x) + e^{2x}x\cos(3x) + e^{2x}x\sin(3x)$

$$SolucionNoHomogenea := y(x) = \_C1\, e^{2x}\cos(3x) + \_C2\, e^{2x}\sin(3x) + e^{2x}x\cos(3x) + e^{2x}x\sin(3x) \tag{3}$$

> $sistema := eval(subs(x=0, rhs(SolucionNoHomogenea)) =-3), eval\left(subs\left(x = \frac{Pi}{2}, rhs(SolucionNoHomogenea)\right) =-3\right) : sistema_1; sistema_2;$

$$\_C1 = -3$$
$$-\_C2\, e^{\pi} - \frac{1}{2}\, e^{\pi}\pi = -3 \tag{4}$$

> $parametros := solve(\{sistema\});$

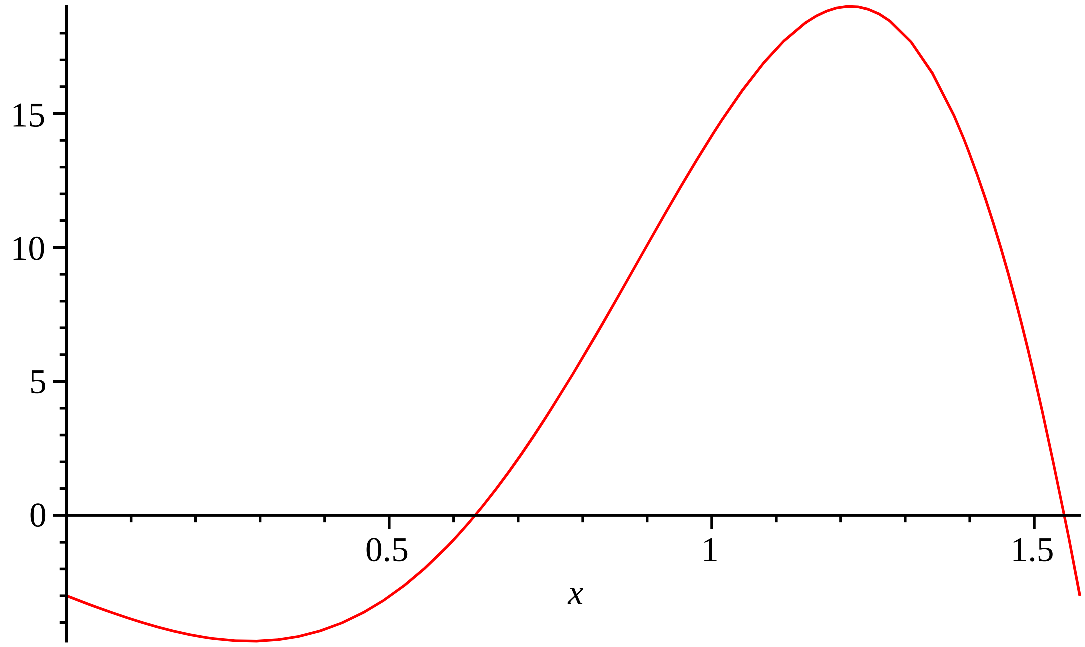
$$parametros := \left\{\_C1 = -3, \_C2 = -\frac{1}{2}\,\frac{e^{\pi}\pi - 6}{e^{\pi}}\right\} \tag{5}$$

> $SolucionParticular := subs(\_C1 = rhs(parametros_1), \_C2 = rhs(parametros_2), SolucionNoHomogenea);$

$$SolucionParticular := y(x) = -3\, e^{2x}\cos(3x) - \frac{1}{2}\,\frac{\left(e^{\pi}\pi - 6\right) e^{2x}\sin(3x)}{e^{\pi}} + e^{2x}x\cos(3x) + e^{2x}x\sin(3x) \tag{6}$$

RESPUESTA 1) b)

> $plot\left(rhs(SolucionParticular), x = 0 .. \frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)$



>

RESPUESTA 1) c)

> $SolucionHomogenea := y(x) = \_C1\, e^{2x} \cos(3x) + \_C2\, e^{2x} \sin(3x)$

$$SolucionHomogenea := y(x) = \_C1\, e^{2x} \cos(3x) + \_C2\, e^{2x} \sin(3x) \quad (7)$$

> $SolucionParticularNoHomogeneidad := y(x) = e^{2x} x \cos(3x) + e^{2x} x \sin(3x)$

$$SolucionParticularNoHomogeneidad := y(x) = e^{2x} x \cos(3x) + e^{2x} x \sin(3x) \quad (8)$$

> $a := 2; b := 3;$

$$a := 2$$
$$b := 3 \quad (9)$$

> $EcuacionCaracteristica := expand((m - a - b \cdot I) \cdot (m - a + b \cdot I)) = 0$

$$EcuacionCaracteristica := m^2 - 4\, m + 13 = 0 \quad (10)$$

> $EcuacionHomogenea := diff(y(x), x\$2) - 4 \cdot diff(y(x), x) + 13 \cdot y(x) = 0;$

$$EcuacionHomogenea := \frac{d^2}{dx^2} y(x) - 4 \left(\frac{d}{dx} y(x)\right) + 13\, y(x) = 0 \quad (11)$$

> $Q(x) := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(SolucionParticularNoHomogeneidad), lhs(EcuacionHomogenea))))$

$$Q(x) := 6\, e^{2x} (\cos(3x) - \sin(3x)) \quad (12)$$

> $EcuacionNoHomogenea := lhs(EcuacionHomogenea) = Q(x)$

$$EcuacionNoHomogenea := \frac{d^2}{dx^2} y(x) - 4 \left(\frac{d}{dx} y(x)\right) + 13\, y(x) = 6\, e^{2x} (\cos(3x) - \sin(3x)) \quad (13)$$

COMPROBACION

> $SolucionNoHomogenea$

$$y(x) = \_C1\, e^{2x} \cos(3x) + \_C2\, e^{2x} \sin(3x) + e^{2x} x \cos(3x) + e^{2x} x \sin(3x) \quad (14)$$

> $SolucionGeneral := dsolve(EcuacionNoHomogenea);$

$$SolucionGeneral := y(x) = \_C2\, e^{2x} \sin(3x) + \_C1\, e^{2x} \cos(3x) + \frac{1}{3} e^{2x} (1 + 3x) \cos(3x) + e^{2x} x \sin(3x) \quad (15)$$

FIN RESPUESTA 1)

<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<

2) (25/100)

a) (20/100 puntos) OBTENER LA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL PROBLEMA DE CONDICIONES INICIALES SIGUIENTE

(sin utilizar dsolve)

>

>

$$\frac{d}{dt} x(t) + x(t) \sin(t) = \sin(t) \cos(t)$$
$$x(0) = 1 \quad (16)$$

b) (5/100 puntos) GRAFICAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA EN a) PARA UN INTERVALO DE $0 < t < 6$

> *restart*

RESPUESTA 2) a)

> $p(t) := \sin(t); q(t) := \sin(t) \cdot \cos(t)$

$$p(t) := \sin(t)$$
$$q(t) := \sin(t) \cos(t) \quad (17)$$

> $IntP := int(p(t), t); ExponPneg := \exp(-IntP); ExponPpos := \exp(IntP);$

$$IntP := -\cos(t)$$
$$ExponPneg := e^{\cos(t)}$$
$$ExponPpos := e^{-\cos(t)} \quad (18)$$

> $IntQ := int(ExponPpos \cdot q(t), t)$

$$IntQ := e^{-\cos(t)} \cos(t) + e^{-\cos(t)} \quad (19)$$

> $SolucionGeneral := x(t) = simplify(\_C1 \cdot ExponPneg + ExponPneg \cdot IntQ)$

$$SolucionGeneral := x(t) = \_C1\, e^{\cos(t)} + \cos(t) + 1 \quad (20)$$

> $parametro := isolate(eval(subs(t = 0, rhs(SolucionGeneral) = 1)), \_C1)$

$$parametro := \_C1 = -\frac{1}{e} \quad (21)$$

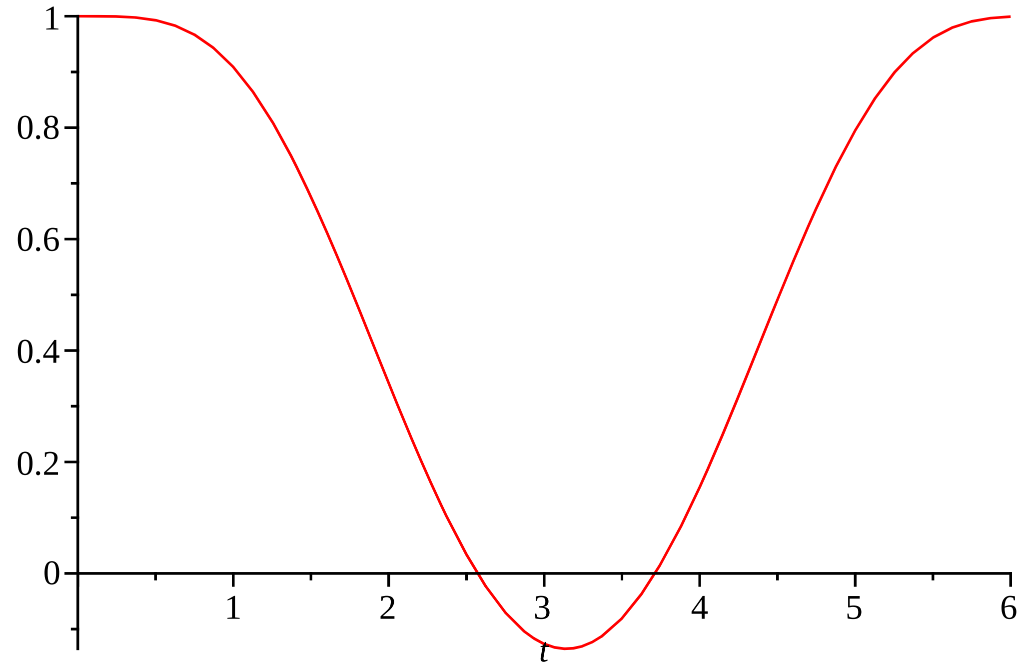
> $SolucionParticular := subs(\_C1 = rhs(parametro), SolucionGeneral)$

$$SolucionParticular := x(t) = -\frac{e^{\cos(t)}}{e} + \cos(t) + 1 \quad (22)$$

>

RESPUESTA 2) b)

> $plot(rhs(SolucionParticular), t = 0..6)$



FIN RESPUESTA 2)

<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<

3) (25/100)

a) (15/100) OBTENER LA MATRIZ "A" CUYA MATRIZ EXPONENCIAL ESTÁ DADA

>

$$MatrizExponencial := \begin{bmatrix} \frac{13}{16} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{16} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ -\frac{3}{16} & -\frac{1}{4} & \frac{11}{16} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{5}{16} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{5}{16} \end{bmatrix} e^{4t} \quad \textbf{(23)}$$

>

b) (10/100 puntos) CON LA MATRIZ A OBTENIDA EN EL INCISO a) PROPONER UN SISTEMA HOMOGÉNEO DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON x(t) y(t) z(t) COMO INCÓGNITAS

> *restart*

RESPUESTA 3) a)

$$> MatrizExponencial := \begin{bmatrix} \frac{13}{16} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{16} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ -\frac{3}{16} & -\frac{1}{4} & \frac{11}{16} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{5}{16} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{5}{16} \end{bmatrix} e^{4t}$$

(24)

$$MatrizExponencial := \begin{bmatrix} \frac{13}{16} + \frac{1}{4}t + \frac{3}{16}e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{4t} & -\frac{5}{16} - \frac{1}{4}t + \frac{5}{16}e^{4t} \\ -\frac{3}{8} - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}e^{4t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{4t} & -\frac{5}{8} + \frac{1}{2}t + \frac{5}{8}e^{4t} \\ -\frac{3}{16} + \frac{1}{4}t + \frac{3}{16}e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{4t} & \frac{11}{16} - \frac{1}{4}t + \frac{5}{16}e^{4t} \end{bmatrix} \quad \textbf{(24)}$$

> $with(linalg):$

> $AA := map(rcurry(eval, t='0'), map(diff, MatrizExponencial, t))$

$$AA := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(25)}$$

>

RESPUESTA 3) b)

> $Sistema := diff(x(t), t) = x(t) + y(t) + z(t), diff(y(t), t) = x(t) + 2\cdot y(t) + 3\cdot z(t), diff(z(t), t) = x(t) + y(t) + z(t) : Sistema_1; Sistema_2; Sistema_3;$

$$\frac{d}{dt} x(t) = x(t) + y(t) + z(t)$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = x(t) + 2\, y(t) + 3\, z(t)$$

$$\frac{d}{dt} z(t) = x(t) + y(t) + z(t) \quad \textbf{(26)}$$

FIN RESPUESTA 3)

<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<

4) (20/100)

a) (15/100) OBTENER LA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL SISTEMA CON LAS CONDICIONES INICIALES DADAS **(se puede utilizar dsolve)**:

>

$$\frac{d}{dt} x(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^{3t}$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^{2t}$$

$$\frac{d}{dt} z(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^{t} \quad \textbf{(27)}$$

>

$$x(0) = 1$$

$$y(0) = -2$$

$$z(0) = -3 \quad \textbf{(28)}$$

>

b) (5/100 puntos) GRAFICAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA EN EL INCISO a) EN EL INTERVALO 0 < t < 1

> *restart*

RESPUESTA 4) a)

> $Sistema := \frac{d}{dt} x(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^{3t}, \frac{d}{dt} y(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^{2t}, \frac{d}{dt} z(t)$

$= x(t) + y(t) + z(t) + e^{t}$: $Sistema_1$; $Sistema_2$; $Sistema_3$;

$$\frac{d}{dt} x(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^{3t}$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^{2t}$$

$$\frac{d}{dt} z(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^{t} \tag{29}$$

\> $Condiciones := x(0) = 1, y(0) = -2, z(0) = -3;$

$$Condiciones := x(0) = 1, y(0) = -2, z(0) = -3 \tag{30}$$

\> $Solucion := dsolve(\{Sistema, Condiciones\}) : Solucion_1; Solucion_2; Solucion_3;$

$$x(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{3}e^{3t}t - \frac{11}{18}e^{3t} + \frac{47}{18}$$

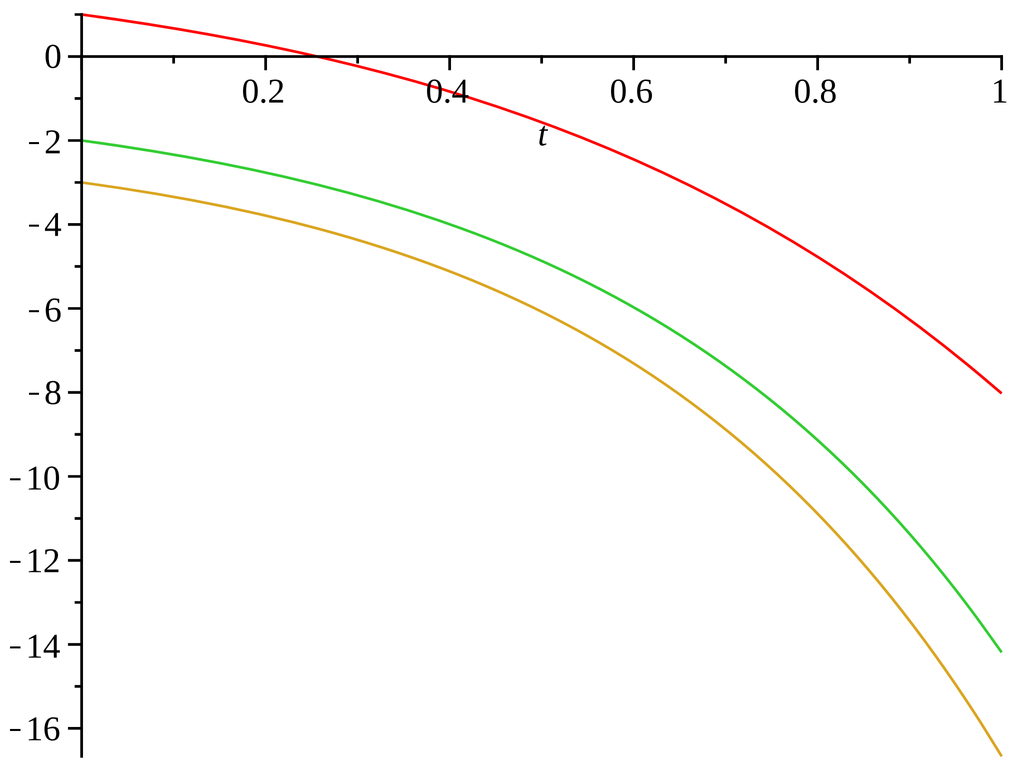
$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{3}e^{3t}t - \frac{17}{18}e^{3t} - \frac{5}{9}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{3t}t - \frac{17}{18}e^{3t} - \frac{37}{18} + \frac{1}{2}e^{t} \tag{31}$$

\>

RESPUESTA 4) b)

\> $plot([rhs(Solucion_1), rhs(Solucion_2), rhs(Solucion_3)], t = 0..1)$



\>

FIN RESPUESTA 4)

<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<

FIN DEL EXAMEN