FACULTAD DE INGENIERÍA
ECUACIONES DIFERENCIALES
TERCER EXAMEN PARCIAL
SEMESTRE 2011-1

2010 NOVIEMBRE 29

```
> restart
```

1) UTILIZANDO EXCLUSIVAMENTE TRANSFORMADA DE LAPLACE (sin usar dsolve):
a) **(15/100 puntos)** OBTENER LA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA ECUACIÓN DADA CON LAS CONDICIONES INICIALES DADAS
b) **(15/100 puntos)** GRAFICAR - JUNTAS - LA SOLUCIÓN OBTENIDA EN EL INCISO a) Y SU PRIMERA DERIVADA PARA UN INTERVALO DE $0 < t < 1$

```
>
```

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 6\left(\frac{d}{dt} y(t)\right) + 9\,y(t) = 27\,\text{Heaviside}(t-4)\,\sin(3t-12)$$

$$y(0) = 1$$
$$D(y)(0) = 1 \qquad \textbf{(1)}$$

```
> restart
>
```

RESPUESTA a)

```
> Ecuacion := diff(y(t), `$`(t, 2)) + 6*diff(y(t), t) + 9*y(t) = 27*Heaviside(t-4)*sin(3*t
      -12);
```

$$Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 6\left(\frac{d}{dt} y(t)\right) + 9\,y(t) = 27\,\text{Heaviside}(t-4)\,\sin(3t-12) \qquad \textbf{(2)}$$

```
> Condiciones := y(0) = 1, D(y)(0) = 1;
```

$$Condiciones := y(0) = 1,\ D(y)(0) = 1 \qquad \textbf{(3)}$$

```
> with(inttrans) :
> TransformadaEcuacion := subs(Condiciones, laplace(Ecuacion, t, s));
```

$$TransformadaEcuacion := s^2\,laplace(y(t), t, s) - 7 - s + 6\,s\,laplace(y(t), t, s) + 9\,laplace(y(t), t, s) = \frac{81\,e^{-4s}}{s^2+9} \qquad \textbf{(4)}$$

```
> TransformadaSolucion := isolate(TransformadaEcuacion, laplace(y(t), t, s));
```

$$TransformadaSolucion := laplace(y(t), t, s) = \frac{\frac{81\,e^{-4s}}{s^2+9} + 7 + s}{s^2 + 6s + 9} \qquad \textbf{(5)}$$

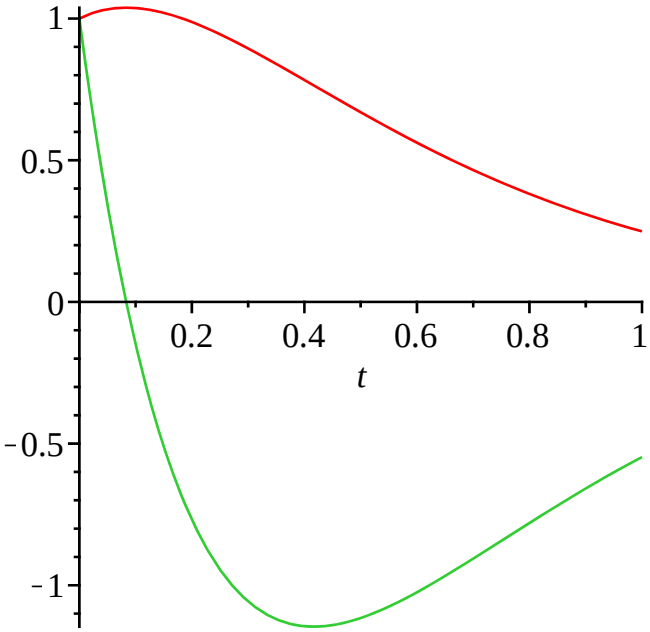
```
> SolucionParticular := invlaplace(TransformadaSolucion, s, t);
```

$$SolucionParticular := y(t) = e^{-3t}(4t+1) + \frac{3}{2}\left(-\cos(3t-12) + e^{-3t+12}(-11+3t)\right)\text{Heaviside}(t-4) \qquad \textbf{(6)}$$

```
>
```

RESPUESTA b)

```
> plot([rhs(SolucionParticular), rhs(diff(SolucionParticular, t))], t = 0..1);
```



>

FIN RESPUESTA 1)

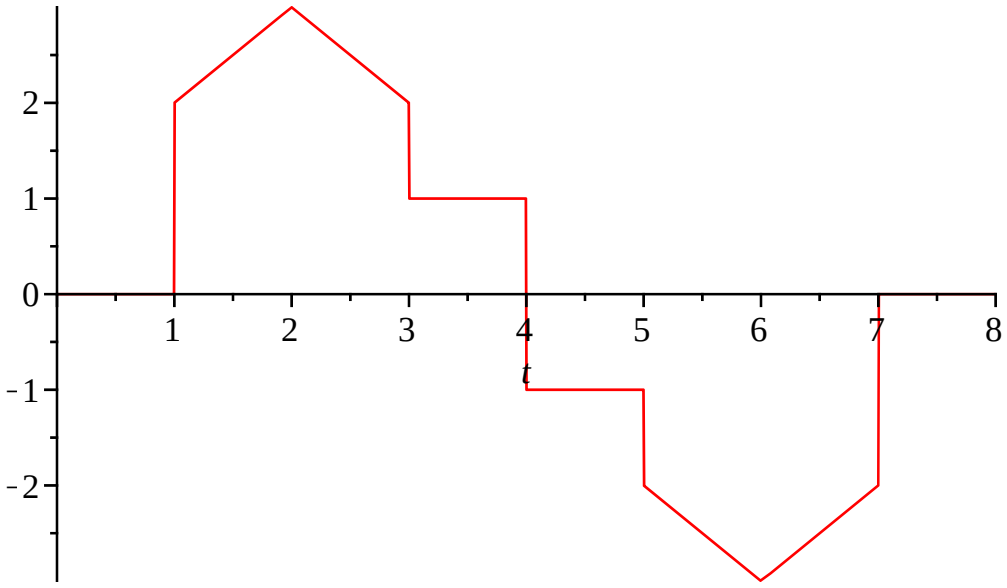
> *restart*

2) DE LA FUNCIÓN DIBUJADA:

a) (15/100 puntos) OBTENER SU TRANSFORMADA DE LAPLACE

b) (25/100 puntos) GRAFICAR EN EL INTERVALO 1.9 < x < 2.1 A LA FUNCION Y SU SERIE SENO DE FOURIER OBTENIDA CALCULANDO SUS PRIMEROS 500 TÉRMINOS

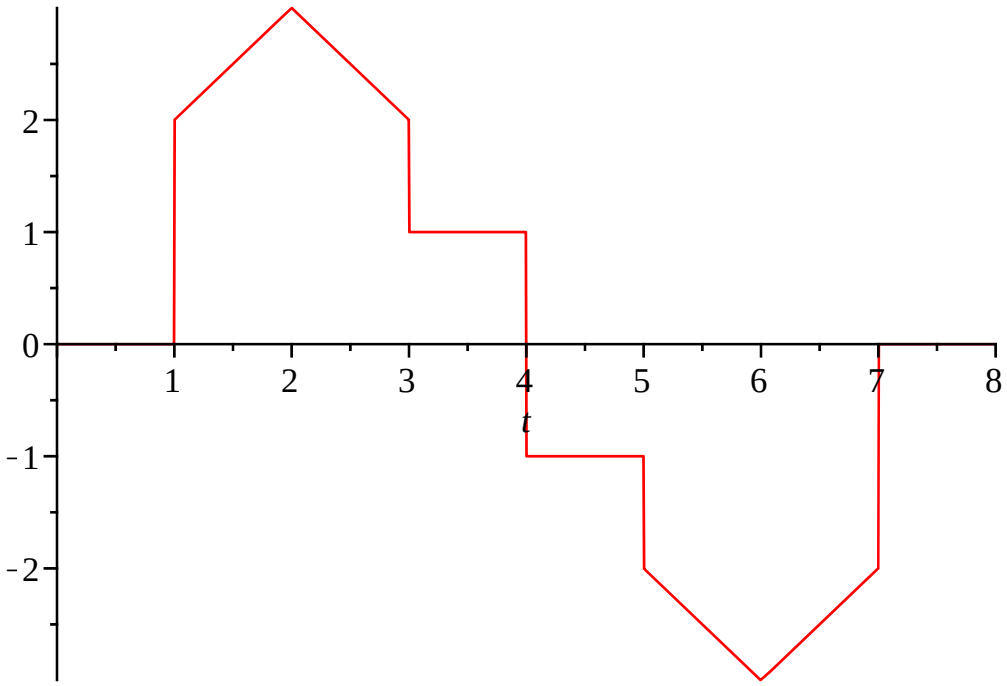
>



> *restart*

RESPUESTA a)

> $f(t) := 2\cdot \text{Heaviside}(t-1) + (t-1)\cdot\text{Heaviside}(t-1) - 2\cdot(t-2)\cdot\text{Heaviside}(t-2) + (t-3)\cdot\text{Heaviside}(t-3) - \text{Heaviside}(t-3) - 2\cdot\text{Heaviside}(t-4) - \text{Heaviside}(t-5) - (t-5)\cdot\text{Heaviside}(t-5) + 2\cdot(t-6)\cdot\text{Heaviside}(t-6) - (t-7)\cdot\text{Heaviside}(t-7) + 2\cdot\text{Heaviside}(t-7) : plot(f(t), t=0..8);$




```
> with(inttrans):
> F(s) := (laplace(f(t), t, s));
```

$$F(s) := \frac{e^{-s} - e^{-7s} + 2\,e^{-6s} - e^{-5s} + e^{-3s} - 2\,e^{-2s}}{s^2} + \frac{2\,e^{-s} + 2\,e^{-7s} - e^{-5s} - 2\,e^{-4s} - e^{-3s}}{s} \quad \textbf{(7)}$$

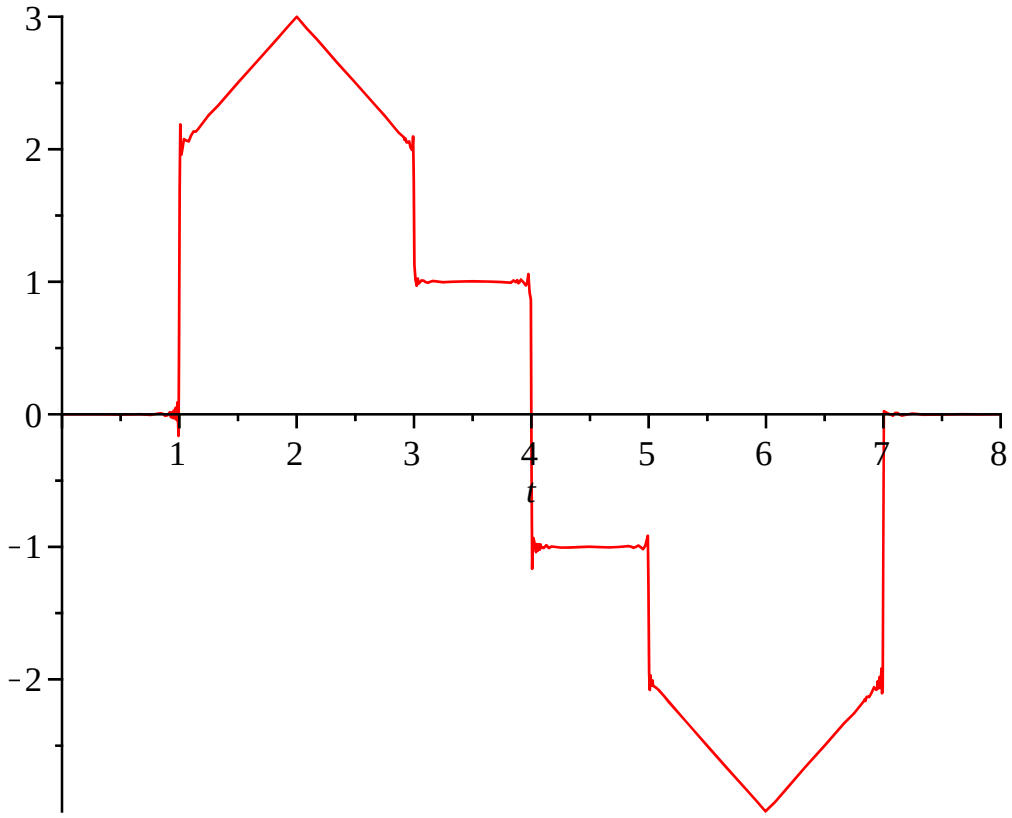
```
>
```

RESPUESTA b)

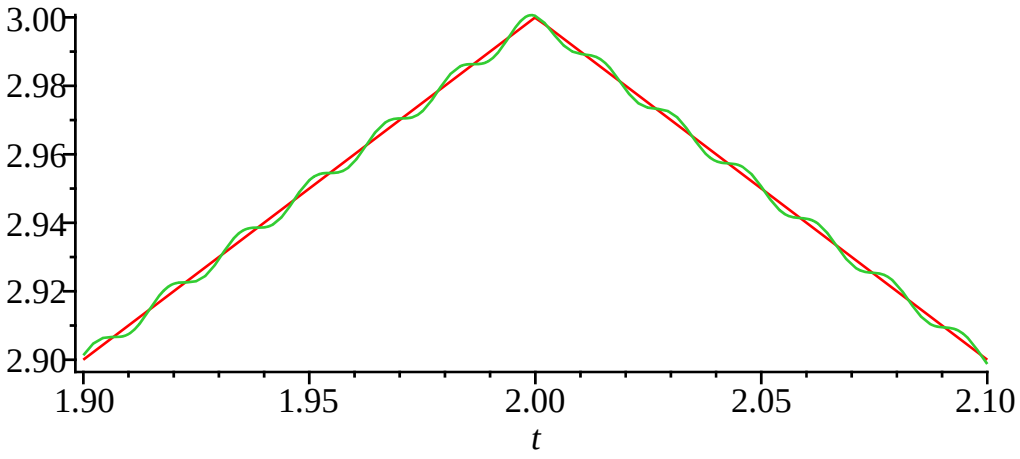
```
> L := 4;
```

$$L := 4 \quad \textbf{(8)}$$

```
> b_n := (1/L)·int(f(t)·sin((n·Pi·t)/L), t = 0..2·L):
> STF_500 := sum(b_n·sin((n·Pi·t)/L), n = 1..500):
> plot(STF_500, t = 0..8);
```



> $plot([f(t), STF_{500}], t = 1.9..2.1)$;



>

FIN RESPUESTA 2

> *restart*

3) (30/100 puntos) OBTENER LA SOLUCIÓN DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN EN DERIVADAS PARCIALES, UTILIZANDO EL MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES CON UNA CONSTANTE DE SEPARACIÓN NEGATIVA:

>

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} z(x,y) - x^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} z(x,y) \right) = z(x,y) \qquad \textbf{(9)}$$

>

REPUESTA 3)

```
> Ecuacion := diff(z(x,y), y$2) - x··2·diff(z(x,y), x) = z(x,y);
```

$$Ecuacion := \frac{\partial^2}{\partial y^2} z(x,y) - x^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} z(x,y) \right) = z(x,y) \quad (10)$$

```
> EcuacionSeparable := eval(subs(z(x,y) = F(x)·G(y), Ecuacion));
```

$$EcuacionSeparable := F(x) \left(\frac{d^2}{dy^2} G(y) \right) - x^2 \left(\frac{d}{dx} F(x) \right) G(y) = F(x)\, G(y) \quad (11)$$

```
>
```

POSIBLE SEPARACIÓN UNO

```
> EcuacionSeparadaUno := (lhs(EcuacionSeparable) + x^2 (d/dx F(x)) G(y)) / (F(x)·G(y))
    = simplify( (rhs(EcuacionSeparable) + x^2 (d/dx F(x)) G(y)) / (F(x)·G(y)) );
```

$$EcuacionSeparadaUno := \frac{\frac{d^2}{dy^2} G(y)}{G(y)} = \frac{F(x) + x^2 \left(\frac{d}{dx} F(x) \right)}{F(x)} \quad (12)$$

```
> EcuacionUnoNeg_y := lhs(EcuacionSeparadaUno) = -beta··2;
```

$$EcuacionUnoNeg_y := \frac{\frac{d^2}{dy^2} G(y)}{G(y)} = -\beta^2 \quad (13)$$

```
> EcuacionUnoNeg_x := rhs(EcuacionSeparadaUno) = -beta··2;
```

$$EcuacionUnoNeg_x := \frac{F(x) + x^2 \left(\frac{d}{dx} F(x) \right)}{F(x)} = -\beta^2 \quad (14)$$

```
> SolucionUnoNeg_y := dsolve(EcuacionUnoNeg_y);
```

$$SolucionUnoNeg_y := G(y) = \_C1 \sin(\beta y) + \_C2 \cos(\beta y) \quad (15)$$

```
> SolucionUnoNeg_x := dsolve(EcuacionUnoNeg_x);
```

$$SolucionUnoNeg_x := F(x) = \_C1\, e^{\frac{1+\beta^2}{x}} \quad (16)$$

```
> _C:
> SolucionGeneralUnoNeg := z(x,y) = subs(_C1 = 1, rhs(SolucionUnoNeg_x))
    ·rhs(SolucionUnoNeg_y);
```

$$SolucionGeneralUnoNeg := z(x,y) = e^{\frac{1+\beta^2}{x}} \left(\_C1 \sin(\beta y) + \_C2 \cos(\beta y) \right) \quad (17)$$

```
>
```

POSIBLE SEPARACIÓN DOS

```
> EcuacionSeparadaDos
```

$$:= simplify\left(\frac{\left(lhs(EcuacionSeparable) + x^2 \left(\frac{d}{dx} F(x) \right) G(y) - F(x) \cdot G(y) \right)}{(F(x) \cdot G(y))} \right)$$

$$= simplify\left(\frac{\left(rhs(EcuacionSeparable) + x^2 \left(\frac{d}{dx} F(x) \right) G(y) - F(x) \cdot G(y) \right)}{(F(x) \cdot G(y))} \right);$$

$$EcuacionSeparadaDos := \frac{\frac{d^2}{dy^2} G(y) - G(y)}{G(y)} = \frac{x^2 \left(\frac{d}{dx} F(x) \right)}{F(x)} \quad \textbf{(18)}$$

> $EcuacionDosNeg_y := lhs(EcuacionSeparadaDos) = -beta \cdot \cdot 2;$

$$EcuacionDosNeg_y := \frac{\frac{d^2}{dy^2} G(y) - G(y)}{G(y)} = -\beta^2 \quad \textbf{(19)}$$

> $EcuacionDosNeg_x := rhs(EcuacionSeparadaDos) = -beta \cdot \cdot 2;$

$$EcuacionDosNeg_x := \frac{x^2 \left(\frac{d}{dx} F(x) \right)}{F(x)} = -\beta^2 \quad \textbf{(20)}$$

> $SolucionDosNeg_y := dsolve(EcuacionDosNeg_y);$

$$SolucionDosNeg_y := G(y) = \_C1 \sin\left(\sqrt{-1 + \beta^2}\, y \right) + \_C2 \cos\left(\sqrt{-1 + \beta^2}\, y \right) \quad \textbf{(21)}$$

> $SolucionDosNeg_x := dsolve(EcuacionDosNeg_x);$

$$SolucionDosNeg_x := F(x) = \_C1\, e^{\frac{\beta^2}{x}} \quad \textbf{(22)}$$

> $SolucionGeneralDosNeg := z(x, y) = subs(\_C1 = 1, rhs(SolucionDosNeg_x)) \cdot rhs(SolucionDosNeg_y);$

$$SolucionGeneralDosNeg := z(x, y) = e^{\frac{\beta^2}{x}} \left(\_C1 \sin\left(\sqrt{-1 + \beta^2}\, y \right) + \_C2 \cos\left(\sqrt{-1 + \beta^2}\, y \right) \right) \quad \textbf{(23)}$$

>

FIN RESPUESTA 3

> *restart*

FIN EXAMEN

>