> *restart*

FACULTAD DE INGENIERÍA
ECUACIONES DIFERENCIALES
SEMESTRE 2011-2
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

2011-04-15

> *restart*

1) (40/100 puntos) DADA LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) - y(x) = x e^{-x} + x e^{x} \quad \textbf{(1)}$$

a) (25 puntos) OBTENGA LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL UTILIZANDO EXCLUSIVAMENTE EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS (**SIN UTILIZAR dsolve**)

b) (10 puntos) CON LA SOLUCIÓN GENERAL OBTENIDA EN EL INCISO **a)** Y DADAS LAS CONDICIONES INICIALES y(0) = 2 & y'(0) = - 2 OBTENGA LA SOLUCIÓN PARTICULAR (**SIN UTILIZAR dsolve**)

c) (5 puntos) GRAFIQUE - JUNTAS - LA SOLUCIÓN PARTICULAR OBTENIDA EN EL INCISO **b)** Y SU PRIMERA DERIVADA, PARA EL INTERVALO 0 < x < 2

> *restart*

RESPUESTA INCISO **a)**

> $Ecuacion := \frac{d^2}{dx^2} y(x) - y(x) = x e^{-x} + x e^{x}$

$$Ecuacion := \frac{d^2}{dx^2} y(x) - y(x) = x e^{-x} + x e^{x} \quad \textbf{(2)}$$

> $EcuacionHomogenea := lhs(Ecuacion) = 0$

$$EcuacionHomogenea := \frac{d^2}{dx^2} y(x) - y(x) = 0 \quad \textbf{(3)}$$

> $ParteNoHomogenea := rhs(Ecuacion)$

$$ParteNoHomogenea := x e^{-x} + x e^{x} \quad \textbf{(4)}$$

> $EcuacionCaracteristica := m \cdot \cdot 2 - 1 = 0$

$$EcuacionCaracteristica := m^2 - 1 = 0 \quad \textbf{(5)}$$

> $Raiz := solve(EcuacionCaracteristica)$

$$Raiz := 1, -1 \quad \textbf{(6)}$$

> $Solucion1 := y(x) = \exp(Raiz_1 \cdot x); Solucion2 := y(x) = \exp(Raiz_2 \cdot x)$

$$Solucion1 := y(x) = e^{x}$$
$$Solucion2 := y(x) = e^{-x} \quad \textbf{(7)}$$

> **_C:**

> $SolucionHomogenea := y(x) = \_C1 \cdot rhs(Solucion1) + \_C2 \cdot rhs(Solucion2)$

$$SolucionHomogenea := y(x) = \_C1\, e^{x} + \_C2\, e^{-x} \quad \textbf{(8)}$$

> $SolucionNoHomogenea := y(x) = A(x) \cdot rhs(Solucion1) + B(x) \cdot rhs(Solucion2)$

$$SolucionNoHomogenea := y(x) = A(x)\, e^{x} + B(x)\, e^{-x} \quad \textbf{(9)}$$

> $with(linalg):$

> $WW := wronskian([rhs(Solucion1), rhs(Solucion2)], x)$

$$WW := \begin{bmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{bmatrix} \quad \textbf{(10)}$$

> $BB := array([0, ParteNoHomogenea])$

$$BB := \begin{bmatrix} 0 & x\,e^{-x} + x\,e^{x} \end{bmatrix} \quad \textbf{(11)}$$

> $DerParametro := linsolve(WW, BB)$

$$DerParametro := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\,\frac{x\,(e^{-x}+e^{x})}{e^{x}} & -\frac{1}{2}\,\frac{x\,(e^{-x}+e^{x})}{e^{-x}} \end{bmatrix} \quad \textbf{(12)}$$

> $Aprima := DerParametro_1;\ Bprima := DerParametro_2;$

$$Aprima := \frac{1}{2}\,\frac{x\,(e^{-x}+e^{x})}{e^{x}}$$

$$Bprima := -\frac{1}{2}\,\frac{x\,(e^{-x}+e^{x})}{e^{-x}} \quad \textbf{(13)}$$

> $A(x) := int(Aprima, x) + \_C1;\ B(x) := int(Bprima, x) + \_C2;$

$$A(x) := -\frac{1}{4}\,\frac{x}{(e^{x})^{2}} - \frac{1}{8\,(e^{x})^{2}} + \frac{1}{4}\,x^{2} + \_C1$$

$$B(x) := -\frac{1}{4}\,x^{2} - \frac{1}{4}\,x\,(e^{x})^{2} + \frac{1}{8}\,(e^{x})^{2} + \_C2 \quad \textbf{(14)}$$

> $SolucionGeneral := simplify(SolucionNoHomogenea);$

$$SolucionGeneral := y(x) = -\frac{1}{4}\,x\,e^{-x} - \frac{1}{8}\,e^{-x} + \frac{1}{4}\,e^{x}x^{2} + \_C1\,e^{x} - \frac{1}{4}\,e^{-x}x^{2} - \frac{1}{4}\,x\,e^{x} + \frac{1}{8}\,e^{x} + \_C2\,e^{-x} \quad \textbf{(15)}$$

RESPUESTA INCISO **b)**

> $Condiciones := y(0) = 2, D(y)(0) = -2;$

$$Condiciones := y(0) = 2,\ D(y)(0) = -2 \quad \textbf{(16)}$$

> $Sistema := subs(x = 0, rhs(SolucionGeneral) = 2), subs(x = 0, rhs(diff(SolucionGeneral, x)) = -2) : Sistema_1;\ Sistema_2;$

$$\_C1 + \_C2 = 2$$

$$-\frac{1}{4} + \_C1 - \_C2 = -2 \quad \textbf{(17)}$$

> $Parametro := solve(\{Sistema\}, \{\_C1, \_C2\})$

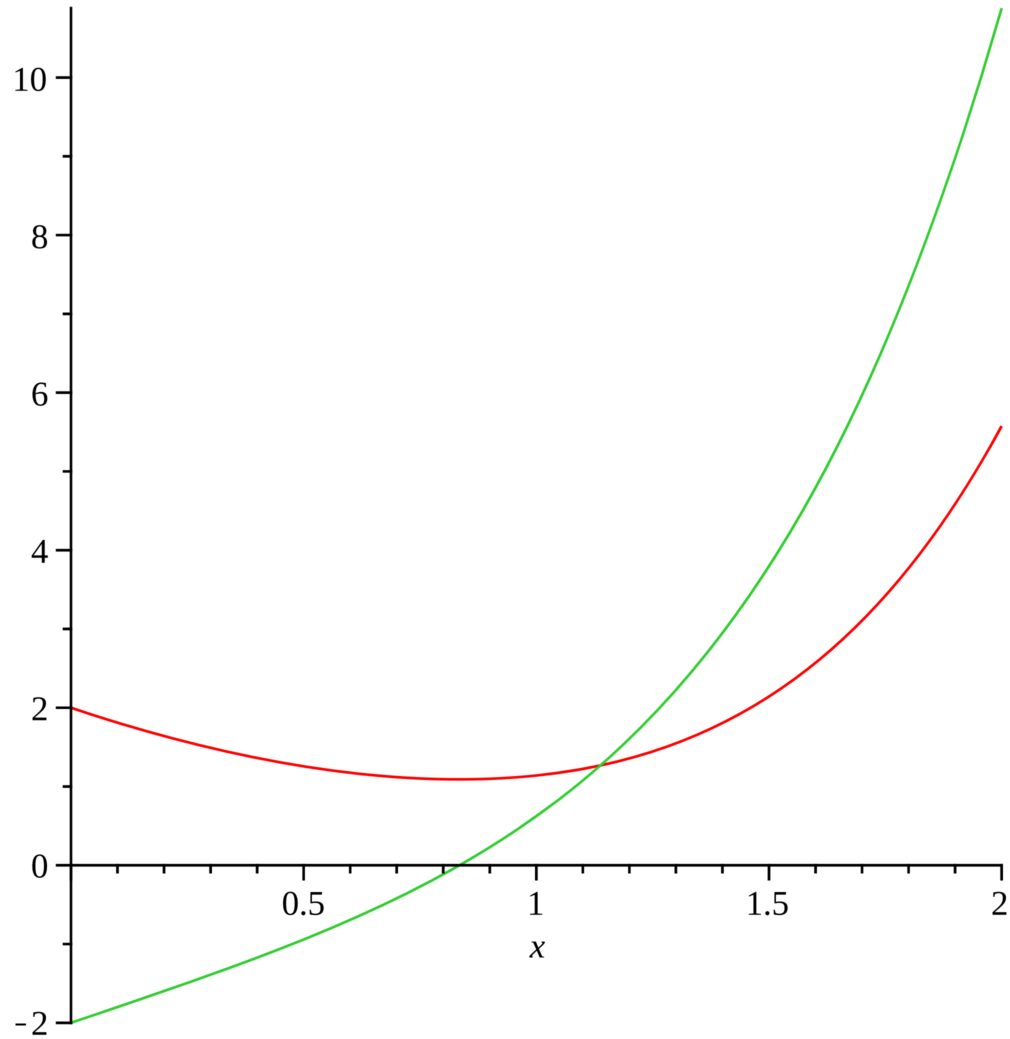
$$Parametro := \left\{\_C1 = \frac{1}{8},\ \_C2 = \frac{15}{8}\right\} \quad \textbf{(18)}$$

> $SolucionParticular := simplify\left(subs\left(\_C1 = rhs\left(Parametro_1\right), \_C2 = rhs\left(Parametro_2\right), SolucionGeneral\right)\right);$

$$SolucionParticular := y(x) = -\frac{1}{4}\,x\,e^{-x} + \frac{7}{4}\,e^{-x} + \frac{1}{4}\,e^{x}x^{2} + \frac{1}{4}\,e^{x} - \frac{1}{4}\,e^{-x}x^{2} - \frac{1}{4}\,x\,e^{x} \quad \textbf{(19)}$$

RESPUESTA INCISO **c)**

> $plot([rhs(SolucionParticular), rhs(diff(SolucionParticular, x))], x = 0..2)$



FIN RESPUESTA **1)**

> *restart*

2) (20/100 puntos) OBTENER LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL SIGUIENTE **(SIN UTILIZAR dsolve)**

$$\frac{d}{dt}\, y(t) + \frac{y(t)}{t} = t\, e^{t} \qquad \textbf{(20)}$$

RESPUESTA

> $Ecuacion := \frac{d}{dt}\, y(t) + \frac{y(t)}{t} = t\, e^{t}$

$$Ecuacion := \frac{d}{dt}\, y(t) + \frac{y(t)}{t} = t\, e^{t} \qquad \textbf{(21)}$$

> $p(t) := \frac{1}{t};\ q(t) := t \cdot \exp(t);$

$$p(t) := \frac{1}{t}$$

$$q(t) := t\, e^{t} \qquad \textbf{(22)}$$

> **_C:**

> $ParteHomogenea := \_C1 \cdot \exp(-int(p(t), t))$

$$ParteHomogenea := \frac{\_C1}{t} \tag{23}$$

> $ParteNoHomogenea := expand(\exp(-int(p(t), t)) \cdot int(\exp(int(p(t), t)) \cdot q(t), t))$

$$ParteNoHomogenea := \frac{2\,e^t}{t} - 2\,e^t + t\,e^t \tag{24}$$

> $SolucionGeneral := y(t) = ParteHomogenea + ParteNoHomogenea;$

$$SolucionGeneral := y(t) = \frac{\_C1}{t} + \frac{2\,e^t}{t} - 2\,e^t + t\,e^t \tag{25}$$

FIN RESPUESTA **2)**

> *restart*

3) **(20/100 puntos)** DADA LA MATRIZ EXPONENCIAL SIGUIENTE:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} e^{3t} \tag{26}$$

a) (10 puntos) OBTENER SU MATRIZ **A** CORRESPONDIENTE

b) (10 puntos) CON LA MATRIZ **A** OBTENIDA EN EL INCISO **a)** PROPONER UN SISTEMA HOMOGÉNEO DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON **x(t)** & **y(t)** COMO INCÓGNITAS

RESPUESTA INCISO **a)**

> $MatExp := \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} e^{3t}$

$$MatExp := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} \\ -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} & \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} \end{bmatrix} \tag{27}$$

> $with(linalg):$

> $AA := map(rcurry(eval, t = '0'), map(diff, MatExp, t))$

$$AA := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

RESPUESTA INCISO **b)**

> $Sistema := diff(x(t), t) = x(t) + 2 \cdot y(t), diff(y(t), t) = 2 \cdot x(t) + y(t) : Sistema_1; Sistema_2;$

$$\frac{d}{dt}\,x(t) = x(t) + 2\,y(t)$$

$$\frac{d}{dt}\,y(t) = 2\,x(t) + y(t) \tag{29}$$

FIN RESPUESTA **3)**

> *restart*

4) **(20/100 puntos)** DADO EL SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

> $diff(x(t), t) = x(t) + y(t) + z(t) + \exp(t); diff(y(t), t) = x(t) + y(t) + z(t) + \exp(2*t);$
> $diff(z(t), t) = x(t) + y(t) + z(t) + \exp(3*t);$

$$\frac{d}{dt} x(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^{t}$$
$$\frac{d}{dt} y(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^{2t}$$
$$\frac{d}{dt} z(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^{3t} \tag{30}$$

a) (15 puntos) OBTENER SU SOLUCIÓN PARTICULAR CON LAS CONDICIONES: x(0) = 6; y(0) = - 4; z(0) = 3

b) (5 puntos) GRAFICAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA EN EL INCISO **a)** EN EL INTERVALO 0 < t < 0.75

> *restart*

RESPUESTA INCISO **a)**

> $Sistema := \frac{d}{dt} x(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^{t}, \frac{d}{dt} y(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^{2t}, \frac{d}{dt} z(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^{3t} : Sistema_1; Sistema_2; Sistema_3;$

$$\frac{d}{dt} x(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^{t}$$
$$\frac{d}{dt} y(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^{2t}$$
$$\frac{d}{dt} z(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^{3t} \tag{31}$$

> $Condiciones := x(0) = 6, y(0) = -4, z(0) = 3;$

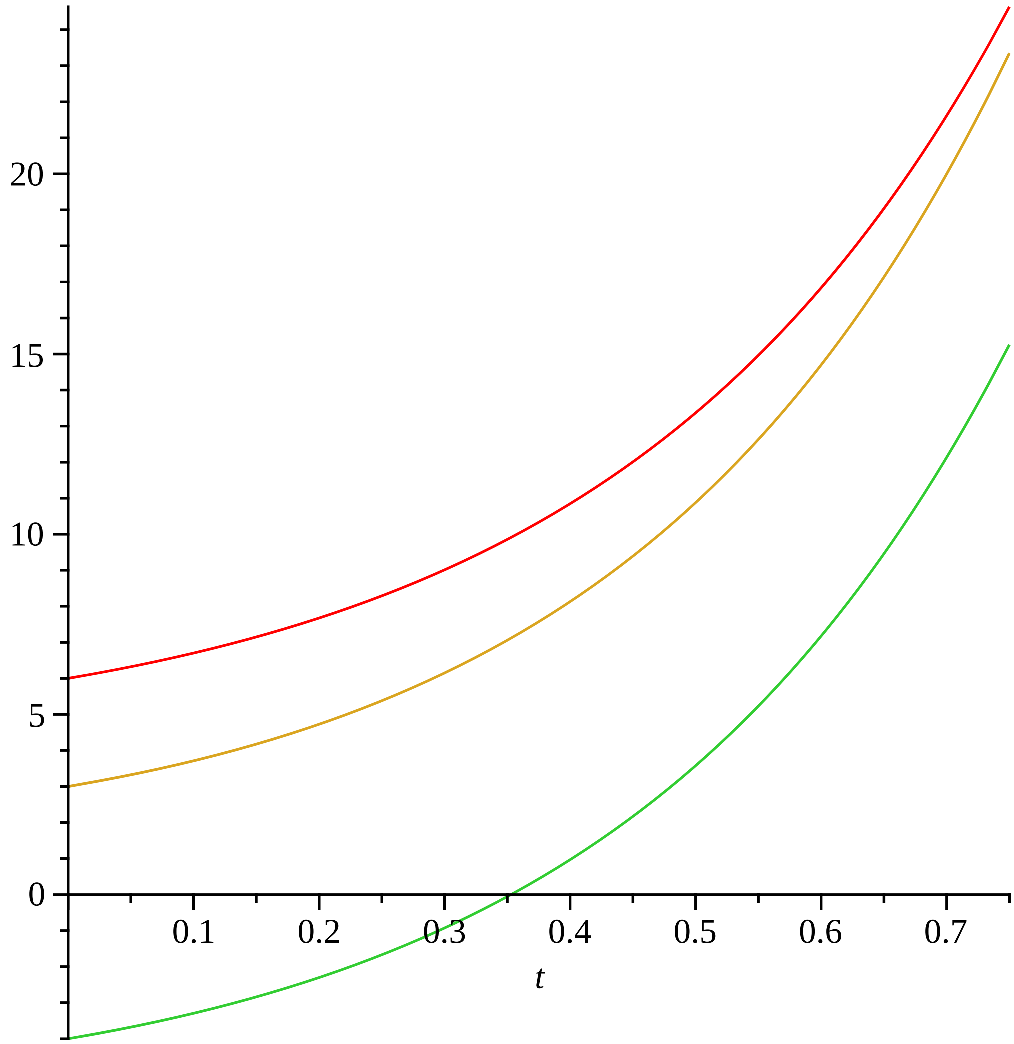
$$Condiciones := x(0) = 6, y(0) = -4, z(0) = 3 \tag{32}$$

> $SolucionParticular := dsolve(\{Sistema, Condiciones\}) : SolucionParticular_1; SolucionParticular_2; SolucionParticular_3;$

$$x(t) = -\frac{1}{2} e^{2t} + \frac{1}{3} e^{3t} t + \frac{37}{18} e^{3t} + \frac{1}{2} e^{t} + \frac{71}{18}$$
$$y(t) = \frac{1}{3} e^{3t} t + \frac{37}{18} e^{3t} - \frac{1}{2} e^{t} - \frac{50}{9}$$
$$z(t) = -\frac{1}{2} e^{2t} + \frac{1}{3} e^{3t} t - \frac{1}{2} e^{t} + \frac{43}{18} e^{3t} + \frac{29}{18} \tag{33}$$

RESPUESTA INCISO **b)**

> $plot([rhs(SolucionParticular_1), rhs(SolucionParticular_2), rhs(SolucionParticular_3)], t = 0 ..0.75)$



FIN RESPUESTA **4)**

> *restart*

FIN DE LAS RESPUESTAS DEL EXAMEN

>

>

>