>

SOLUCION

>

FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
ECUACIONES DIFERENCIALES
SEMESTRE 2012-1
PRIMER EXAMEN PARCIAL

2011-09-26

>

DADO EL PROBLEMA DE CONDICIONES INICIALES Y LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE SEGUNDO ORDEN DE COEFICIENTES CONSTANTES - NO HOMOGÉNEA

> diff(x(t), t$2) + 9· x(t) = 60 sin(3 t); x(0) = 2; D(x)(0) = 3;

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + 9\, x(t) = 60 \sin(3\, t)$$

$$x(0) = 2$$

$$D(x)(0) = 3 \tag{1}$$

1) **(20/100 puntos)** OBTENER SU SOLUCIÓN GENERAL UTILIZANDO EXCLUSIVAMENTE EL MÉTODO DE PARÁMETROS VARIABLES **(sin utilizar dsolve)**

> *restart* :

> $Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 9\, x(t) = 60 \sin(3\, t);$

$$Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 9\, x(t) = 60 \sin(3\, t) \tag{2}$$

> $EcuacionHomogenea := lhs(Ecuacion) = 0;$

$$EcuacionHomogenea := \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 9\, x(t) = 0 \tag{3}$$

> $Q(t) := rhs(Ecuacion);$

$$Q(t) := 60 \sin(3\, t) \tag{4}$$

> $EcuacionCaracteristica := m \cdot\cdot 2 + 9 = 0;$

$$EcuacionCaracteristica := m^2 + 9 = 0 \tag{5}$$

> $Raiz := solve(EcuacionCaracteristica);$

$$Raiz := 3\, I, -3\, I \tag{6}$$

> $Sol_1 := \cos\left(\mathrm{Im}\left(Raiz_1\right) \cdot t\right); Sol_2 := \sin\left(\mathrm{Im}\left(Raiz_1\right) \cdot t\right);$

$$Sol_1 := \cos(3\, t)$$

$$Sol_2 := \sin(3\, t) \tag{7}$$

> $SolucionHomogenea := x(t) = C1 \cdot Sol_1 + C2 \cdot Sol_2;$

$$SolucionHomogenea := x(t) = C1 \cos(3\, t) + C2 \sin(3\, t) \tag{8}$$

> $SolucionNoHomogenea := x(t) = A(t) \cdot Sol_1 + B(t) \cdot Sol_2;$

$$SolucionNoHomogenea := x(t) = A(t) \cos(3\, t) + B(t) \sin(3\, t) \tag{9}$$

> *with*(*linalg*) :

> $WW := wronskian([Sol_1, Sol_2], t);$

$$WW := \begin{bmatrix} \cos(3t) & \sin(3t) \\ -3\sin(3t) & 3\cos(3t) \end{bmatrix} \tag{10}$$

> $BB := array([0, Q(t)]);$

$$BB := \begin{bmatrix} 0 & 60\sin(3t) \end{bmatrix} \tag{11}$$

> $SOL := simplify(linsolve(WW, BB));$

$$SOL := \begin{bmatrix} -20\sin(3t)^2 & 20\cos(3t)\sin(3t) \end{bmatrix} \tag{12}$$

> $Aprima := SOL_1; Bprima := SOL_2;$

$$Aprima := -20\sin(3t)^2$$
$$Bprima := 20\cos(3t)\sin(3t) \tag{13}$$

> $A(t) := int(Aprima, t) + C1; B(t) := int(Bprima, t) + C2;$

$$A(t) := \frac{10}{3}\cos(3t)\sin(3t) - 10t + C1$$
$$B(t) := -\frac{10}{3}\cos(3t)^2 + C2 \tag{14}$$

> $SolucionGeneral := simplify(SolucionNoHomogenea);$

$$SolucionGeneral := x(t) = -10\cos(3t)\,t + C1\cos(3t) + C2\sin(3t) \tag{15}$$

>

2) **(20/100 puntos)** OBTENER LA SOLUCIÓN PARTICULAR DADAS LAS CONDICIONES INICIALES **(sin utilizar dsolve)**

> $Condiciones := x(0) = 2, D(x)(0) = 3;$

$$Condiciones := x(0) = 2, D(x)(0) = 3 \tag{16}$$

> $SistemaParametros := eval(subs(t = 0, rhs(SolucionGeneral) = 2)), eval(subs(t = 0, rhs(diff(SolucionGeneral, t)) = 3));$

$$SistemaParametros := C1 = 2, -10 + 3\,C2 = 3 \tag{17}$$

> $Parametros := solve(\{SistemaParametros\});$

$$Parametros := \left\{C1 = 2, C2 = \frac{13}{3}\right\} \tag{18}$$

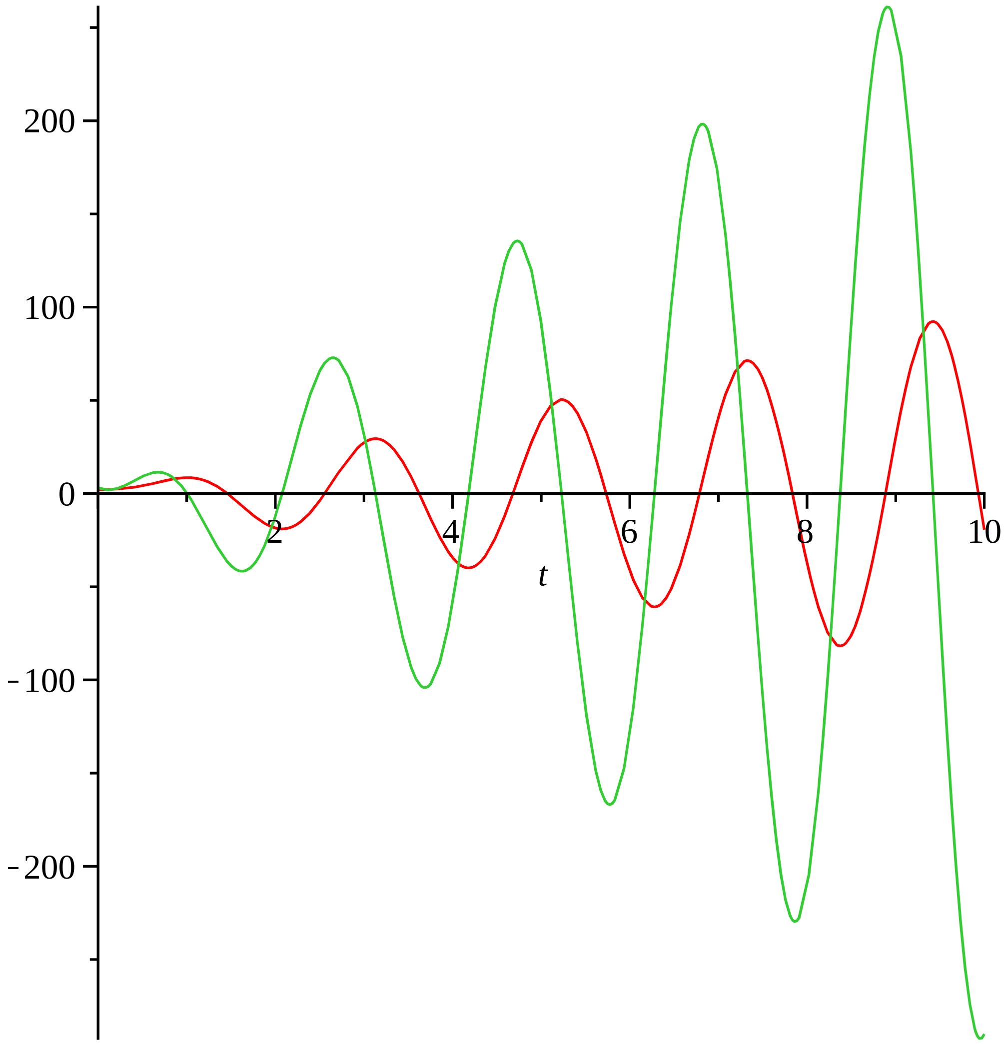
> $SolucionParticular := subs(C1 = rhs(Parametros_1), C2 = rhs(Parametros_2), SolucionGeneral);$

$$SolucionParticular := x(t) = -10\cos(3t)\,t + 2\cos(3t) + \frac{13}{3}\sin(3t) \tag{19}$$

>

3) **(10/100 puntos)** GRAFICAR JUNTAS LA SOLUCIÓN PARTICULAR OBTENIDA Y SU PRIMERA DERIVADA, PARA UN INTERVALO DE 0 < t < 10

> $plot([rhs(SolucionParticular), rhs(diff(SolucionParticular, t))], t = 0..10)$



>

4) **(10/100 puntos)** CONVERTIR LA ECUACIÓN EN UN SISTEMA EQUIVALENTE DE DOS ECUACIONES DIFERENCIALES INCLUIDAS SUS CONDICIONES INICIALES.

> $SistemaEcuaciones := diff\left(x_1(t), t\right) = x_2(t), diff\left(x_2(t), t\right) = -9 \cdot x_1(t) + 60 \cdot \sin(3 \cdot t)$:
$SistemaEcuaciones_1$; $SistemaEcuaciones_2$;

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = x_2(t)$$

$$\frac{d}{dt} x_2(t) = -9\, x_1(t) + 60 \sin(3\, t) \tag{20}$$

> $CondicionesIniciales := x_1(0) = 2, x_2(0) = 3$;

$$CondicionesIniciales := x_1(0) = 2, x_2(0) = 3 \tag{21}$$

>

5) **(10/100 puntos)** OBTENER SU MATRIZ EXPONENCIAL

> $AA := array([[0, 1], [-9, 0]])$;

$$AA := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

> $with(linalg):$

> $MatrizExponencial := exponential(AA, t);$

$$MatrizExponencial := \begin{bmatrix} \cos(3\,t) & \frac{1}{3}\sin(3\,t) \\ -3\sin(3\,t) & \cos(3\,t) \end{bmatrix} \quad (23)$$

>

6) **(20/100 puntos)** OBTENER LA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL SISTEMA UTILIZANDO LA MATRIZ EXPONENCIAL **(sin utilizar dsolve)**

> $BB := array([0, 60 \cdot \sin(3 \cdot t)])$

$$BB := \begin{bmatrix} 0 & 60\sin(3\,t) \end{bmatrix} \quad (24)$$

> $Xcero := array([2, 3])$

$$Xcero := \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

> $MatExpoTau := map(rcurry(eval, t='t - \text{tau}'), MatrizExponencial);$

$$MatExpoTau := \begin{bmatrix} \cos(3\,t - 3\,\tau) & \frac{1}{3}\sin(3\,t - 3\,\tau) \\ -3\sin(3\,t - 3\,\tau) & \cos(3\,t - 3\,\tau) \end{bmatrix} \quad (26)$$

> $BBtau := map(rcurry(eval, t='\text{tau}'), BB);$

$$BBtau := \begin{bmatrix} 0 & 60\sin(3\,\tau) \end{bmatrix} \quad (27)$$

> $SOLUCION := evalm(evalm(MatrizExponencial \&* Xcero) + map(int, evalm(MatExpoTau \&* BBtau), \text{tau} = 0..t)) : SOLUCION_1; SOLUCION_2;$

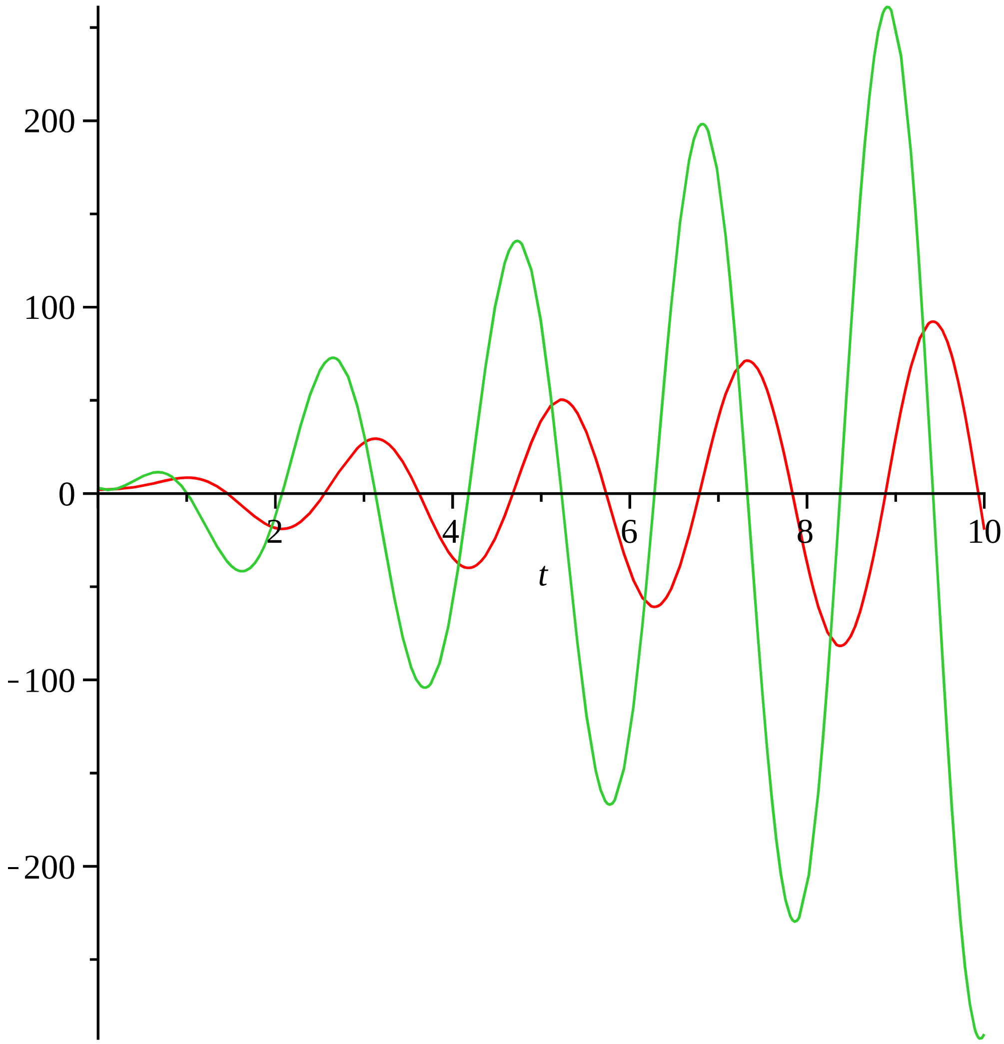
$$-10\cos(3\,t)\,t + 2\cos(3\,t) + \frac{13}{3}\sin(3\,t)$$

$$3\cos(3\,t) - 6\sin(3\,t) + 30\sin(3\,t)\,t \quad (28)$$

>

7) **(10/100 puntos)** GRAFICAR JUNTAS LAS DOS INCÓGNITAS DE LA SOLUCION PARTICULAR DEL SISTEMA OBTENIDA, PARA UN INTERVALO 0 < t < 10.

> $plot([SOLUCION_1, SOLUCION_2], t = 0..10);$



>

FIN DEL EXAMEN

>

>