>

SOLUCIÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA
ECUACIONES DIFERENCIALES
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (CAPÍTULO 1)

2011 OCTUBRE 17

>

_C1

1) (35/100 puntos) DÉ LA CLASIFICACIÓN (ordinaria o derivadas parciales, orden, grado, lineal o no lineal) (5 puntos) DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL:

$$x\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2-2\,y(x)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)=-4\,x \qquad (1)$$

>

E INDIQUE CUÁLES DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES SON SU SOLUCIÓN Y DE QUÉ TIPO (general, particular o singular) Y CUÁLES NO LO SON, ARGUMENTANDO CADA RESULTADO (3 puntos cada una)

$$solucion_1 := y=\_C1\,x^2+\_C1$$
$$solucion_2 := y=\frac{x^2}{\_C1}+\_C1$$
$$solucion_3 := y=\frac{x^2}{\_C1}+\frac{1}{\_C1}$$
$$solucion_4 := y=\frac{1}{5}\,x^2+5$$
$$solucion_5 := y=\frac{1}{3}\,x^2+\frac{1}{3}$$
$$solucion_6 := y=-x^2-1$$
$$solucion_7 := y=-2\,x^2-2$$
$$solucion_8 := y=-2\,x$$
$$solucion_9 := y=-4\,x$$
$$solucion_{10} := y=2\,x \qquad (2)$$

> $Ecuacion := x\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2-2\,y(x)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)=-4\,x$

$$Ecuacion := x\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2-2\,y(x)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)=-4\,x \qquad (3)$$

>

RESPUESTA REACTIVO 1)

>

LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ES ORDINARIA DE PRIMER ORDEN, NO LINEAL, GRADO 2.

>

ANÁLISIS DE LAS FUNCIONES PRESENTADAS

> $solucion_1 := y=\_C1\,x^2+\_C1$

$$solucion_1 := y=\_C1\,x^2+\_C1 \qquad (4)$$

> $comprobacion_1 := simplify(eval(subs(y(x)=rhs(solucion_1),lhs(Ecuacion)-rhs(Ecuacion)=0)))$

$$comprobacion_1 := -4\,\_C1^2\,x+4\,x=0 \qquad (5)$$

POR LO TANTO solucion[1] NO ES SOLUCIÓN

> $solucion_2 := y = \frac{x^2}{\_C1} + \_C1;$

$$solucion_2 := y = \frac{x^2}{\_C1} + \_C1 \quad (6)$$

> $comprobacion_2 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(solucion_2), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0)))$

$$comprobacion_2 := 0 = 0 \quad (7)$$

POR LO TANTO solucion[2] ES LA SOLUCIÓN <u>GENERAL</u> POR SER DE PRIMER ORDEN Y TIENE UNA CONSTANTE ARBITRARIA

> $solucion_3 := y = \frac{x^2}{\_C1} + \frac{1}{\_C1}$

$$solucion_3 := y = \frac{x^2}{\_C1} + \frac{1}{\_C1} \quad (8)$$

> $comprobacion_3 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(solucion_3), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0)))$

$$comprobacion_3 := \frac{4\,x\,(-1 + \_C1^2)}{\_C1^2} = 0 \quad (9)$$

POR LO TANTO solucion[3] NO ES SOLUCIÓN

> $solucion_4 := y = \frac{1}{5}\,x^2 + 5$

$$solucion_4 := y = \frac{1}{5}\,x^2 + 5 \quad (10)$$

> $comprobacion_4 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(solucion_4), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0)))$

$$comprobacion_4 := 0 = 0 \quad (11)$$

> $comprobacion_{40} := solve(rhs(solucion_2) = rhs(solucion_4), \_C1);$

$$comprobacion_{40} := 5, \frac{1}{5}\,x^2 \quad (12)$$

COMO solucion[4] SATISFACE LA ECUACIÓN Y ADEMÁS _C1 = 5 ENTONCES ES UNA SOLUCIÓN <u>PARTICULAR</u>

> $solucion_5 := y = \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{1}{3}$

$$solucion_5 := y = \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{1}{3} \quad (13)$$

> $comprobacion_5 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(solucion_5), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0)))$

$$comprobacion_5 := \frac{32}{9}\,x = 0 \quad (14)$$

COMO LA FUNCIÓN solucion[5] NO SATISFACE LA ECUACIÓN NO ES SOLUCIÓN

> $solucion_6 := y = -x^2 - 1$

$$solucion_6 := y = -x^2 - 1 \quad (15)$$

> $comprobacion_6 := simplify\left(eval\left(subs\left(y(x) = rhs\left(solucion_6\right), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0\right)\right)\right)$

$$comprobacion_6 := 0 = 0 \tag{16}$$

> $comprobacion_{60} := solve\left(rhs\left(solucion_2\right) = rhs\left(solucion_6\right), \_C1\right);$

$$comprobacion_{60} := -1, -x^2 \tag{17}$$

COMO solucion[6] SATISFACE LA ECUACIÓN Y ADEMÁS _C1 = - 1 ENTONCES ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR

> $solucion_7 := y = -2\ x^2 - 2$

$$solucion_7 := y = -2\ x^2 - 2 \tag{18}$$

> $comprobacion_7 := simplify\left(eval\left(subs\left(y(x) = rhs\left(solucion_7\right), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0\right)\right)\right)$

$$comprobacion_7 := -12\ x = 0 \tag{19}$$

COMO LA FUNCIÓN solucion[7] NO SATISFACE LA ECUACIÓN NO ES SOLUCIÓN

> $solucion_8 := y = -2\ x$

$$solucion_8 := y = -2\ x \tag{20}$$

> $comprobacion_8 := simplify\left(eval\left(subs\left(y(x) = rhs\left(solucion_8\right), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0\right)\right)\right)$

$$comprobacion_8 := 0 = 0 \tag{21}$$

> $comprobacion_{80} := solve\left(rhs\left(solucion_2\right) = rhs\left(solucion_8\right), \_C1\right);$

$$comprobacion_{80} := -x, -x \tag{22}$$

COMO solucion[8] SATISFACE LA ECUACIÓN PERO NO HAY VALOR REAL PARA EL PARÁMETRO _C1 ENTONCES ES UNA SOLUCIÓN SINGULAR

> $solucion_9 := y = -4\ x$

$$solucion_9 := y = -4\ x \tag{23}$$

> $comprobacion_9 := simplify\left(eval\left(subs\left(y(x) = rhs\left(solucion_9\right), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0\right)\right)\right)$

$$comprobacion_9 := -12\ x = 0 \tag{24}$$

COMO LA FUNCIÓN solucion[9] NO SATISFACE LA ECUACIÓN NO ES SOLUCIÓN

> $solucion_{10} := y = 2\ x$

$$solucion_{10} := y = 2\ x \tag{25}$$

> $comprobacion_{10} := simplify\left(eval\left(subs\left(y(x) = rhs\left(solucion_{10}\right), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0\right)\right)\right)$

$$comprobacion_{10} := 0 = 0 \tag{26}$$

> $comprobacion_{100} := solve\left(rhs\left(solucion_2\right) = rhs\left(solucion_{10}\right), \_C1\right);$

$$comprobacion_{100} := x, x \tag{27}$$

COMO solucion[10] SATISFACE LA ECUACIÓN PERO NO HAY VALOR REAL PARA EL PARÁMETRO _C1 ENTONCES ES UNA SOLUCIÓN SINGULAR

COMPROBACIÓN

> *soluciones* := *dsolve*(*Ecuacion*);

$$soluciones := y(x) = -2\,x,\ y(x) = 2\,x,\ y(x) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{\_C1^2}-4\right)\_C1 \qquad (28)$$

FIN REACTIVO 1)

> *restart*

2) ((15/100 puntos) DADA LA SIGUIENTE SOLUCIÓN GENERAL, OBTENGA SU ECUACIÓN DIFERENCIAL CORRESPONDIENTE :

$$y(x) = \_C1\,e^{2\,x} + 9\,x\,e^{2\,x} + \_C2\,\cos(3\,x) + \_C3\,\sin(3\,x) \qquad (29)$$

>

RESPUESTA REACTIVO 2)

> *Solucion* := $y(x) = \_C1\,e^{2\,x} + 9\,x\,e^{2\,x} + \_C2\,\cos(3\,x) + \_C3\,\sin(3\,x)$

$$Solucion := y(x) = \_C1\,e^{2\,x} + 9\,x\,e^{2\,x} + \_C2\,\cos(3\,x) + \_C3\,\sin(3\,x) \qquad (30)$$

> *SolucionHomogenea* := $y(x) = \_C1\,e^{2\,x} + \_C2\,\cos(3\,x) + \_C3\,\sin(3\,x)$

$$SolucionHomogenea := y(x) = \_C1\,e^{2\,x} + \_C2\,\cos(3\,x) + \_C3\,\sin(3\,x) \qquad (31)$$

> *ParteNoHomogenea* := $9\,x\,e^{2\,x}$

$$ParteNoHomogenea := 9\,x\,e^{2\,x} \qquad (32)$$

> *Sistema* := *diff*(*SolucionHomogenea*, *x*), *diff*(*SolucionHomogenea*, *x*\$2), *diff*(*SolucionHomogenea*, *x*\$3) : $Sistema_1$; $Sistema_2$; $Sistema_3$;

$$\frac{d}{dx}\,y(x) = 2\,\_C1\,e^{2\,x} - 3\,\_C2\,\sin(3\,x) + 3\,\_C3\,\cos(3\,x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\,y(x) = 4\,\_C1\,e^{2\,x} - 9\,\_C2\,\cos(3\,x) - 9\,\_C3\,\sin(3\,x)$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\,y(x) = 8\,\_C1\,e^{2\,x} + 27\,\_C2\,\sin(3\,x) - 27\,\_C3\,\cos(3\,x) \qquad (33)$$

> *Parametros* := *solve*({*Sistema*}, {_C1, _C2, _C3}) : *Parametros*[1]; *Parametros*[2]; *Parametros*[3];

$$\_C1 = \frac{1}{26}\,\frac{\frac{d^3}{dx^3}\,y(x) + 9\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)}{e^{2\,x}}$$

$$\_C2 = \frac{1}{117}\,\frac{1}{\cos(3\,x)^2+\sin(3\,x)^2}\left(2\cos(3\,x)\left(\frac{d^3}{dx^3}\,y(x)\right) + 18\cos(3\,x)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) - 13\cos(3\,x)\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) + 3\sin(3\,x)\left(\frac{d^3}{dx^3}\,y(x)\right) - 12\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)\sin(3\,x)\right)$$

$$\_C3 = \frac{1}{117}\,\frac{1}{\cos(3\,x)^2+\sin(3\,x)^2}\left(2\sin(3\,x)\left(\frac{d^3}{dx^3}\,y(x)\right) + 18\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)\sin(3\,x) - 3\cos(3\,x)\left(\frac{d^3}{dx^3}\,y(x)\right) + 12\cos(3\,x)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) - 13\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right)\sin(3\,x)\right) \qquad (34)$$

> *EcuacionIntermedia* := *simplify*(*subs*(_C1 = *rhs*(*Parametros*[1]), _C2 = *rhs*(*Parametros*[2]), _C3 = *rhs*(*Parametros*[3]), *SolucionHomogenea*))

(35)

$$EcuacionIntermedia := y(x) = \frac{1}{18}\,\frac{d^3}{dx^3}\,y(x) + \frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\,y(x) - \frac{1}{9}\,\frac{d^2}{dx^2}\,y(x) \quad (35)$$

> $EcuacionHomogenea := rhs(EcuacionIntermedia)\cdot 18 - lhs(EcuacionIntermedia)\cdot 18 = 0;$

$$EcuacionHomogenea := \frac{d^3}{dx^3}\,y(x) + 9\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) - 2\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) - 18\,y(x) = 0 \quad (36)$$

> $Q(x) := simplify(eval(subs(y(x) = ParteNoHomogenea, lhs(EcuacionHomogenea))))$

$$Q(x) := 117\,e^{2x} \quad (37)$$

> $EcuacionNoHomogenea := lhs(EcuacionHomogenea) = Q(x);$

$$EcuacionNoHomogenea := \frac{d^3}{dx^3}\,y(x) + 9\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) - 2\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) - 18\,y(x) = 117\,e^{2x} \quad (38)$$

COMPROBACIÓN

> $comprobacion := dsolve(EcuacionNoHomogenea);$

$$comprobacion := y(x) = 9\,x\,(e^{x})^2 + \_C1\cos(3x) + \_C2\,e^{2x} + \_C3\sin(3x) \quad (39)$$

FIN REACTIVO 2)

>

> ***restart***

>

3) (25/100 puntos) OBTENGA LA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL CON LA CONDICIÓN INICIAL DADA - UTILIZANDO EXCLUSIVAMENTE EL MÉTODO DE FACTOR INTEGRANTE - (no utilizar dsolve, ni exactsol, ni separablesol)

$$2\,x^2 + y(x) + (x^2\,y(x) - x)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = 0$$

$$y(1) = -2 \quad (40)$$

> Ecuacion $:= 2\,x^2 + y(x) + (x^2\,y(x) - x)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = 0$

$$Ecuacion := 2\,x^2 + y(x) + (x^2\,y(x) - x)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = 0 \quad (41)$$

RESPUESTA REACTIVO 3)

> $with(DEtools):$

> $FacInt := intfactor(Ecuacion);$

$$FacInt := \frac{1}{x^2} \quad (42)$$

> $M(x, y) := 2\,x^2 + y$

$$M(x, y) := 2\,x^2 + y \quad (43)$$

> $N(x, y) := x^2\,y - x$

$$N(x, y) := x^2\,y - x \quad (44)$$

> $MM(x, y) := expand(FacInt\cdot M(x, y));$

$$MM(x, y) := 2 + \frac{y}{x^2} \quad (45)$$

> $NN(x, y) := expand(FacInt\cdot N(x, y));$

$$NN(x, y) := y - \frac{1}{x} \quad (46)$$

> $comprobacion := simplify(diff(MM(x, y), y) - diff(NN(x, y), x)) = 0;$

$$comprobacion := 0 = 0 \quad (47)$$

> $IMMx := int(MM(x,y),x);$

$$IMMx := 2\,x - \frac{y}{x} \tag{48}$$

> $SolucionGeneral := IMMx + int((NN(x,y) - diff(IMMx,y)),y) = C1;$

$$SolucionGeneral := 2\,x - \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\,y^2 = C1 \tag{49}$$

> $parametro := subs(x=1, y=-2, SolucionGeneral);$

$$parametro := 6 = C1 \tag{50}$$

> $SolucionParticular := subs(C1 = lhs(parametro), SolucionGeneral);$

$$SolucionParticular := 2\,x - \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\,y^2 = 6 \tag{51}$$

FIN REACTIVO 3)

> **restart**

>

4) (25/100 puntos) DADA LA ECUACIÓN DIFERENCIAL SIGUIENTE:

$$e^{-t}\left(\frac{d}{dt}\,s(t)\right) - s(t) = 1 \tag{52}$$

>

a) OBTENGA SU SOLUCIÓN GENERAL (10 puntos)
b) REPRESENTE GRÁFICAMENTE (10 puntos), LA SOLUCIÓN PARTICULAR, PARA LA CONDICIÓN DADA, EN UN INTERVALO DESDE 3.92 < t < 4.01

$$s(4) = 8 \tag{53}$$

>

c) CALCULE (5 puntos) EL VALOR DE LA INCÓGNITA - CON 15 CIFRAS SIGNIFICATIVAS - PARA:

$$t = 1$$
$$\_C1 = 5 \tag{54}$$

RESPUESTA REACTIVO 4)

> $Ecuacion := e^{-t}\left(\frac{d}{dt}\,s(t)\right) - s(t) = 1;$

$$Ecuacion := e^{-t}\left(\frac{d}{dt}\,s(t)\right) - s(t) = 1 \tag{55}$$

a)

> $SolucionGeneral := dsolve(Ecuacion);$

$$SolucionGeneral := s(t) = -1 + e^{e^t}\,\_C1 \tag{56}$$

b)

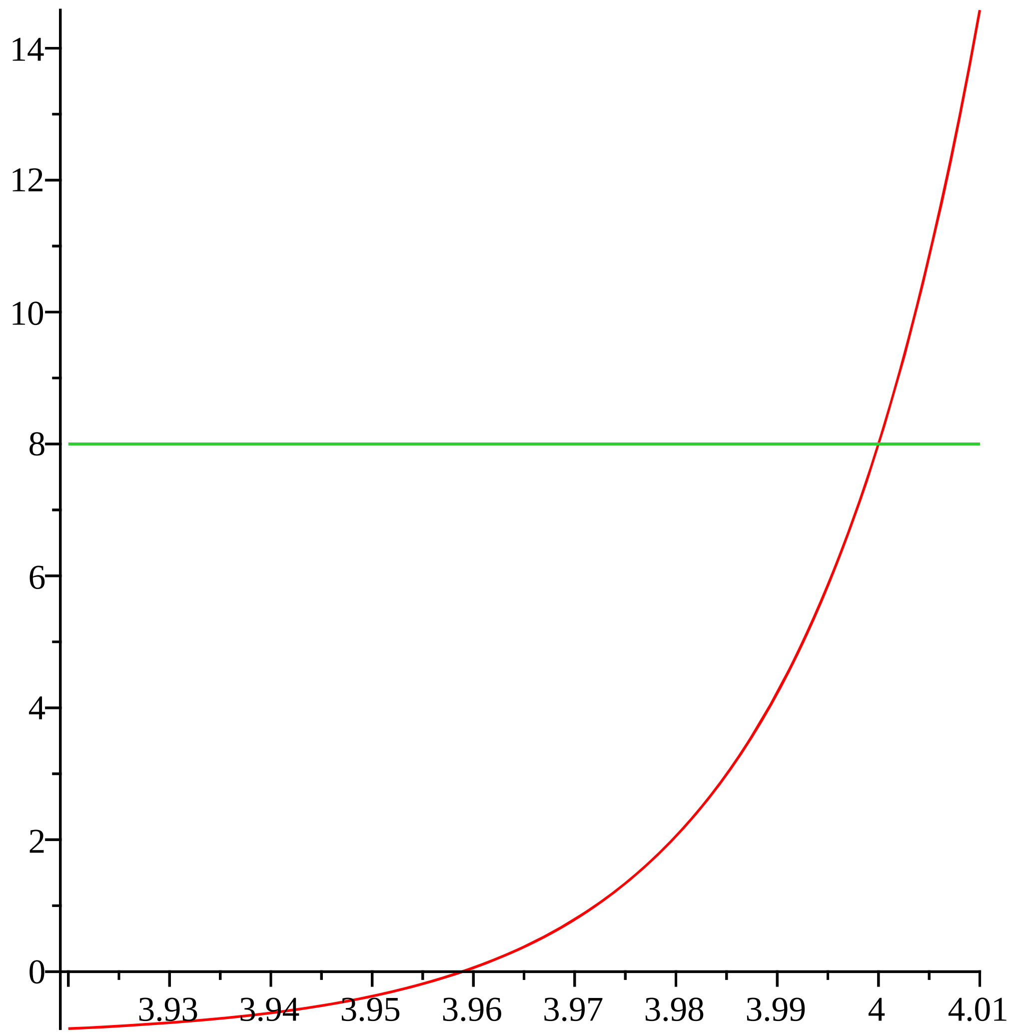
> $Condicion := s(4) = 8;$

$$Condicion := s(4) = 8 \tag{57}$$

> $SolucionParticular := dsolve(\{Ecuacion, Condicion\});$

$$SolucionParticular := s(t) = -1 + \frac{9\,e^{e^t}}{e^{e^4}} \tag{58}$$

> $plot([rhs(SolucionParticular), 8], t = 3.92..4.01);$



c)

> *evalf*(*subs*($t = 1$, $\_C1 = 5$, *rhs*(*SolucionGeneral*)), 15);

$$74.7713112073965 \tag{59}$$

> *restart*

FIN REACTIVO 4

>

FIN EXAMEN