\>

SOLUCIÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA
ECUACIONES DIFERENCIALES
TERCER EXAMEN PARCIAL (TEMAS 4 Y 5)
SEMESTRE 2012-1

2011 NOVIEMBRE 22

\> *restart*

1) UTILIZANDO EXCLUSIVAMENTE TRANSFORMADA DE LAPLACE **(sin usar dsolve)**:

a) **(15/100 puntos)** OBTENER LA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA ECUACIÓN DADA CON LAS CONDICIONES INICIALES DADAS

b) **(15/100 puntos)** GRAFICAR - JUNTAS - LA SOLUCIÓN OBTENIDA EN EL INCISO a) Y SU PRIMERA DERIVADA PARA UN INTERVALO DE 0 < t < 3

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 16\, y(t) = 64\,(t-2)\, \mathrm{Heaviside}(t-2)\, \sin(3\,t-6)$$
$$y(0) = 0$$
$$D(y)(0) = 1 \qquad \textbf{(1)}$$

\>

RESPUESTA INCISO 1a)

\> $Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 16\, y(t) = 64\,(t-2)\, \mathrm{Heaviside}(t-2)\, \sin(3\,t-6);$

$$Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 16\, y(t) = 64\,(t-2)\, \mathrm{Heaviside}(t-2)\, \sin(3\,t-6) \qquad \textbf{(2)}$$

\> $Condiciones := y(0) = 0, D(y)(0) = 1;$

$$Condiciones := y(0) = 0, D(y)(0) = 1 \qquad \textbf{(3)}$$

\> $with(inttrans):$

\> $TransLapEcuacion := simplify(eval(subs(Condiciones, laplace(Ecuacion, t, s))))$

$$TransLapEcuacion := s^2\, laplace(y(t), t, s) - 1 + 16\, laplace(y(t), t, s) = \frac{384\, e^{-2\,s}\, s}{(s^2+9)^2} \qquad \textbf{(4)}$$

\> $TransLapSolucion := simplify(isolate(TransLapEcuacion, laplace(y(t), t, s)))$

$$TransLapSolucion := laplace(y(t), t, s) = \frac{384\, e^{-2\,s}\, s + s^4 + 18\, s^2 + 81}{(s^2+9)^2\,(s^2+16)} \qquad \textbf{(5)}$$

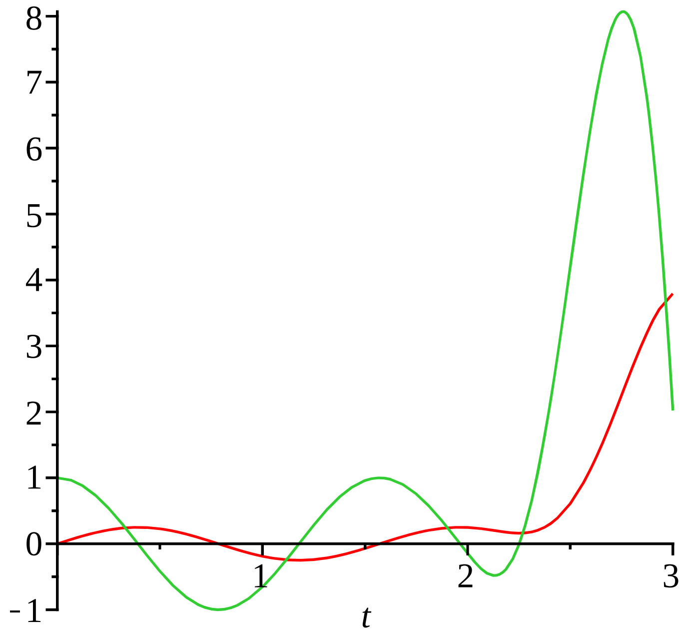
\> $Solucion := invlaplace(TransLapSolucion, s, t);$

$$Solucion := y(t) = \frac{1}{4} \sin(4\,t) + \frac{64}{49}\,(-6\cos(3\,t-6) + 6\cos(4\,t-8) + 7\,(t-2)\sin(3\,t-6))\, \mathrm{Heaviside}(t-2) \qquad \textbf{(6)}$$

\>

RESPUESTA INCISO 1b)

\> $plot([rhs(Solucion), rhs(diff(Solucion, t))], t = 0..3)$

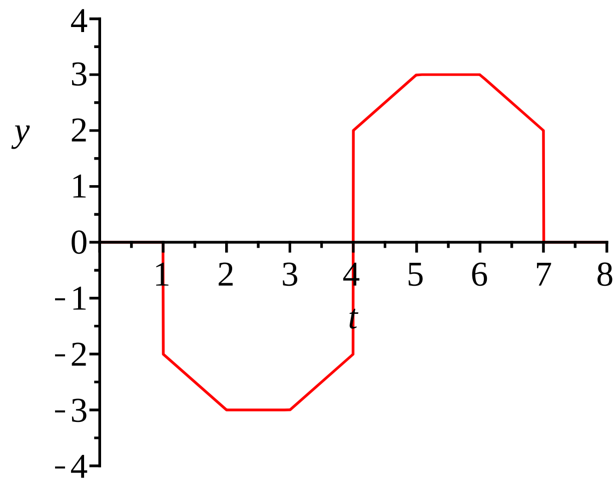


\>

FIN RESPUESTA 1)

\> *restart*

2) DADA LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN SIGUIENTE:

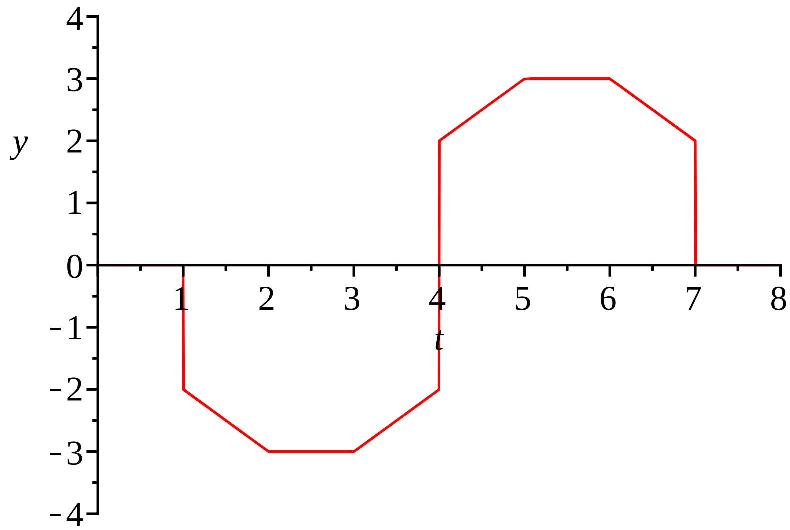


a) **(15/100 puntos)** OBTENER SU TRANSFORMADA DE LAPLACE.
b) **(25/100 puntos)** OBTENER Y GRAFICAR SU SERIE COSENO DE FOURIER PARA 500 TÉRMINOS EN EL MISMO INTERVALO.

\>

RESPUESTA 2a)

\> $f(t) := -2 \cdot \text{Heaviside}(t-1) - (t-1) \cdot \text{Heaviside}(t-1) + (t-2) \cdot \text{Heaviside}(t-2) + (t-3) \cdot \text{Heaviside}(t-3) - (t-4) \cdot \text{Heaviside}(t-4) + 4 \cdot \text{Heaviside}(t-4) + (t-4) \cdot \text{Heaviside}(t-4) - (t-5) \cdot \text{Heaviside}(t-5) - (t-6) \cdot \text{Heaviside}(t-6) + (t-7) \cdot \text{Heaviside}(t-7) - 2 \cdot \text{Heaviside}(t-7) : plot(f(t), t=0..8, y=-4..4);$



> $with(inttrans):$

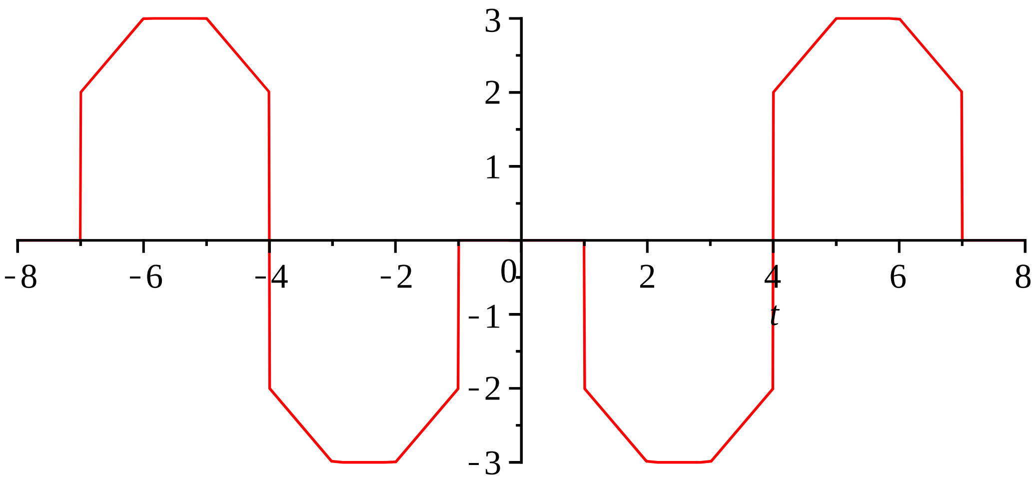
> $F(s) := laplace(f(t), t, s)$

$$F(s) := -\frac{e^{-s} - e^{-7s} + e^{-6s} + e^{-5s} - e^{-3s} - e^{-2s}}{s^2} - \frac{2\left(e^{-s} + e^{-7s} - 2\,e^{-4s}\right)}{s} \quad \textbf{(7)}$$

>

RESPUESTA 2b)

> $g(t) := 2\cdot\text{Heaviside}(t+7) + (t+7)\cdot\text{Heaviside}(t+7) - (t+6)\cdot\text{Heaviside}(t+6) - (t+5)\cdot\text{Heaviside}(t+5) + (t+4)\cdot\text{Heaviside}(t+4) - 4\cdot\text{Heaviside}(t+4) - (t+4)\cdot\text{Heaviside}(t+4) + (t+3)\cdot\text{Heaviside}(t+3) + (t+2)\cdot\text{Heaviside}(t+2) - (t+1)\cdot\text{Heaviside}(t+1) + 2\cdot\text{Heaviside}(t+1) + f(t) : plot(g(t), t=-8..8)$



> $L := 8;$

$$L := 8 \quad \textbf{(8)}$$

> $b_n := simplify\left(\left(\frac{1}{L}\right)\cdot int\left(g(t)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\text{Pi}\cdot t}{L}\right), t=-L..L\right)\right);$

$$b_n := 0 \quad \textbf{(9)}$$

> $a_n := simplify\left(\left(\frac{1}{L}\right)\cdot int\left(g(t)\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\text{Pi}\cdot t}{L}\right), t=-L..L\right)\right);$

(10)

$$a_n := \frac{1}{n^2 \pi^2} \left(4 \left(-4 \cos\left(\frac{1}{4} n \pi\right) - 4 \cos\left(\frac{7}{8} n \pi\right) + \sin\left(\frac{7}{8} n \pi\right) n \pi + 4 \cos\left(\frac{3}{4} n \pi\right) + 4 \cos\left(\frac{5}{8} n \pi\right) - 4 \cos\left(\frac{3}{8} n \pi\right) + 4 \cos\left(\frac{1}{8} n \pi\right) + \sin\left(\frac{1}{8} n \pi\right) n \pi - 2 \sin\left(\frac{1}{2} n \pi\right) n \pi\right)\right) \quad \textbf{(10)}$$

> $a_0 := simplify\left(\left(\frac{1}{L}\right) \cdot int(g(t), t=-L..L)\right); C := \frac{a_0}{2};$

$$a_0 := 0$$

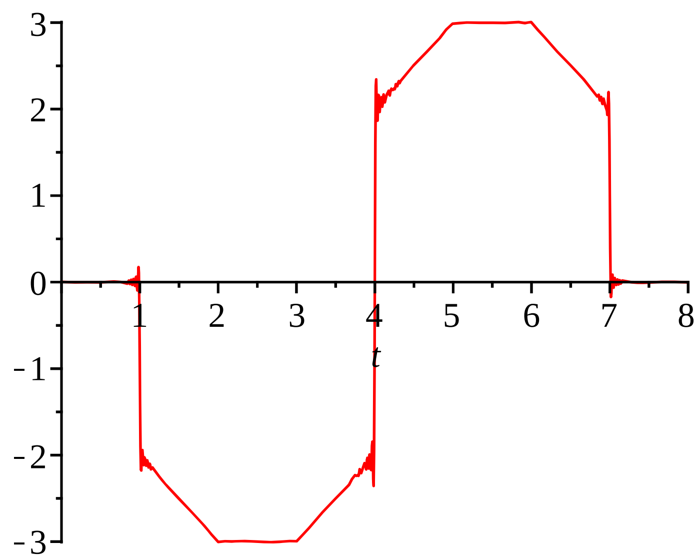
$$C := 0 \quad \textbf{(11)}$$

> $STF := C + Sum\left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi} \cdot t}{L}\right), n = 1..infinity\right)$

$$STF := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} \left(4 \left(-4 \cos\left(\frac{1}{4} n \pi\right) - 4 \cos\left(\frac{7}{8} n \pi\right) + \sin\left(\frac{7}{8} n \pi\right) n \pi + 4 \cos\left(\frac{3}{4} n \pi\right) + 4 \cos\left(\frac{5}{8} n \pi\right) - 4 \cos\left(\frac{3}{8} n \pi\right) + 4 \cos\left(\frac{1}{8} n \pi\right) + \sin\left(\frac{1}{8} n \pi\right) n \pi - 2 \sin\left(\frac{1}{2} n \pi\right) n \pi\right) \cos\left(\frac{1}{8} n \pi t\right)\right) \quad \textbf{(12)}$$

> $STF_{500} := C + sum\left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi} \cdot t}{L}\right), n = 1..500\right) :$

> $plot(STF_{500}, t = 0..8)$



>

FIN RESPUESTA 2)

> *restart*

3) (30/100 puntos) OBTENER LA SOLUCIÓN DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN EN DERIVADAS PARCIALES, UTILIZANDO EL MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES CON UNA **CONSTANTE DE SEPARACIÓN NEGATIVA**:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x,y) + y^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} z(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x} z(x,y) \tag{13}$$

>

C

RESPUESTA 3)

> $Ecuacion := \frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x,y) + y^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} z(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x} z(x,y);$

$$Ecuacion := \frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x,y) + y^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} z(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x} z(x,y) \tag{14}$$

> $EcuacionSeparable := eval(subs(z(x,y) = F(x) \cdot G(y), Ecuacion))$

$$EcuacionSeparable := \left(\frac{d^2}{dx^2} F(x)\right) G(y) + y^2 F(x) \left(\frac{d}{dy} G(y)\right) = \left(\frac{d}{dx} F(x)\right) G(y) \tag{15}$$

> $EcuacionSeparada := simplify\left(\frac{\left(lhs(EcuacionSeparable) - \left(\frac{d}{dx} F(x)\right) G(y) - y^2 F(x) \left(\frac{d}{dy} G(y)\right)\right)}{F(x) \cdot G(y)}\right) = \frac{\left(rhs(EcuacionSeparable) - \left(\frac{d}{dx} F(x)\right) G(y) - y^2 F(x) \left(\frac{d}{dy} G(y)\right)\right)}{F(x) \cdot G(y)}$

$$EcuacionSeparada := \frac{\frac{d^2}{dx^2} F(x) - \left(\frac{d}{dx} F(x)\right)}{F(x)} = -\frac{y^2 \left(\frac{d}{dy} G(y)\right)}{G(y)} \tag{16}$$

> $EcuacionX := lhs(EcuacionSeparada) = \mathrm{alpha}; EcuacionY := rhs(EcuacionSeparada) = \mathrm{alpha};$

$$EcuacionX := \frac{\frac{d^2}{dx^2} F(x) - \left(\frac{d}{dx} F(x)\right)}{F(x)} = \alpha$$

$$EcuacionY := -\frac{y^2 \left(\frac{d}{dy} G(y)\right)}{G(y)} = \alpha \tag{17}$$

> $EcuacionXnegativa := subs(\mathrm{alpha} = -\mathrm{beta} \cdot{} \cdot 2, EcuacionX); EcuacionYnegativa := subs(\mathrm{alpha} = -\mathrm{beta} \cdot{} \cdot 2, EcuacionY);$

$$EcuacionXnegativa := \frac{\frac{d^2}{dx^2} F(x) - \left(\frac{d}{dx} F(x)\right)}{F(x)} = -\beta^2$$

$$EcuacionYnegativa := -\frac{y^2 \left(\frac{d}{dy} G(y)\right)}{G(y)} = -\beta^2 \tag{18}$$

> $SolucionXnegativa := dsolve(EcuacionXnegativa); SolucionYnegativa := dsolve(EcuacionYnegativa)$

$$SolucionXnegativa := F(x) = \_C1\, e^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4\beta^2}\right)x} + \_C2\, e^{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4\beta^2}\right)x}$$

$$SolucionYnegativa := G(y) = \_C1\, e^{-\frac{\beta^2}{y}} \quad \textbf{(19)}$$

> $SolucionGeneral := z(x, y) = subs(\_C1 = 1, rhs(SolucionYnegativa)) \cdot rhs(SolucionXnegativa);$

$$SolucionGeneral := z(x, y) = e^{-\frac{\beta^2}{y}} \left(\_C1\, e^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4\beta^2}\right)x} + \_C2\, e^{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4\beta^2}\right)x}\right) \quad \textbf{(20)}$$

>

FIN RESPUESTA 3)

> *restart*

FIN DEL EXAMEN

>