\> 

SOLUCION

FACULTA DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
ECUACIONES DIFERENCIALES
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO
SEMESTRE 2012-1

EXAMEN TIPO "A"
2011-12-05

\> *restart*

**1) Resuelva la ecuación diferencial**

\> $Ecuacion := (2\cdot x\cdot\cdot 3\cdot y(x)) + (x\cdot\cdot 4 + y(x)\cdot\cdot 4)\cdot diff(y(x), x) = 0$

$$Ecuacion := 2\,x^3\,y(x) + \left(x^4 + y(x)^4\right)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = 0 \tag{1}$$

**RESPUESTA 1)**

\> $with(DEtools):$

\> $odeadvisor(Ecuacion);$

$$[[\_homogeneous, class\ A], \_rational, \_dAlembert] \tag{2}$$

\> $intfactor(Ecuacion)$

$$y(x) \tag{3}$$

RESOLVIENDO POR FACTOR INTEGRANTE

\> $FactInt := y$

$$FactInt := y \tag{4}$$

\> $M(x, y) := 2\,x^3\,y;\ N(x, y) := (x\cdot\cdot 4 + y\cdot\cdot 4);$

$$M(x, y) := 2\,x^3\,y$$

$$N(x, y) := x^4 + y^4 \tag{5}$$

\> $ComprobacionNoExacta := simplify(diff(M(x, y), y) - diff(N(x, y), x)) = 0$

$$ComprobacionNoExacta := -2\,x^3 = 0 \tag{6}$$

\> $MM(x, y) := FactInt\cdot M(x, y);\ NN(x, y) := expand(FactInt\cdot N(x, y));$

$$MM(x, y) := 2\,y^2\,x^3$$

$$NN(x, y) := y\,x^4 + y^5 \tag{7}$$

\> $ComprobacionExacta := simplify(diff(MM(x, y), y) - diff(NN(x, y), x)) = 0;$

$$ComprobacionExacta := 0 = 0 \tag{8}$$

\> $IntMM := int(MM(x, y), x);$

$$IntMM := \frac{1}{2}\,y^2\,x^4 \tag{9}$$

\> $SolucionUno := IntMM + int(\,(NN(x, y) - diff(IntMM, y)), y) = C1;$

$$SolucionUno := \frac{1}{2}\,y^2\,x^4 + \frac{1}{6}\,y^6 = C1 \tag{10}$$

\> $SolucionGeneralUno := lhs(SolucionUno\cdot 6) = C1;$

$$SolucionGeneralUno := 3\,y^2\,x^4 + y^6 = C1 \tag{11}$$

RESOLVIENDO POR EL MÉTODO DE COEFICIENTES HOMOGÉNEOS

\> $Ecuacion;$

(12)

$$2\,x^3\,y(x) + \left(x^4 + y(x)^4\right)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = 0 \quad \textbf{(12)}$$

> $EcuacionSeparable := simplify(isolate(eval(subs(y(x) = x\cdot u(x), Ecuacion)), diff(u(x), x)))$

$$EcuacionSeparable := \frac{d}{dx}\,u(x) = -\frac{u(x)\left(3 + u(x)^4\right)}{x\left(1 + u(x)^4\right)} \quad \textbf{(13)}$$

> $P(u) := \dfrac{u\left(3 + u^4\right)}{\left(1 + u^4\right)}$

$$P(u) := \frac{u\left(3 + u^4\right)}{1 + u^4} \quad \textbf{(14)}$$

> $SolucionTres := int\left(\dfrac{1}{P(u)}, u\right) + int\left(\dfrac{1}{x}, x\right) = C1;$

$$SolucionTres := \frac{1}{3}\ln(u) + \frac{1}{6}\ln\left(3 + u^4\right) + \ln(x) = C1 \quad \textbf{(15)}$$

> $SolucionCuatro := subs\left(u = \dfrac{y}{x}, lhs(SolucionTres)\right) = C2$

$$SolucionCuatro := \frac{1}{3}\ln\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{6}\ln\left(3 + \frac{y^4}{x^4}\right) + \ln(x) = C2 \quad \textbf{(16)}$$

> $SolucionGeneralDos := expand(simplify(\exp(lhs(SolucionCuatro)\cdot 6))) = C2$

$$SolucionGeneralDos := 3\,y^2\,x^4 + y^6 = C2 \quad \textbf{(17)}$$

>

**FIN RESPUESTA 1)**

>

> $restart:$

**2) Resuelva la ecuación diferencial**

> $Ecuacion := diff((x\cdot diff(y(x), x) - y(x)), x) = x\cdot\cdot(-1)$

$$Ecuacion := x\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) = \frac{1}{x} \quad \textbf{(18)}$$

**RESPUESTA 2)**

> $Ecuacion2 := \dfrac{lhs(Ecuacion)}{x} = \dfrac{rhs(Ecuacion)}{x};$

$$Ecuacion2 := \frac{d^2}{dx^2}\,y(x) = \frac{1}{x^2} \quad \textbf{(19)}$$

> $Solucion := dsolve(Ecuacion2);$

$$Solucion := y(x) = -\ln(x) + \_C1\,x + \_C2 \quad \textbf{(20)}$$

**FIN RESPUESTA 2)**

> $restart$

**3) Resuelva la ecuación diferencial**

> $Ecuacion := 2\cdot diff(y(x), x\$2) - 12\cdot diff(y(x), x) + 18\cdot y(x) = 2\cdot\exp(3\cdot x)$

$$Ecuacion := 2\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) - 12\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + 18\,y(x) = 2\,e^{3x} \quad \textbf{(21)}$$

**RESPUESTA 3)**

> $EcuacionNormalizada := \frac{lhs(Ecuacion)}{2} = \frac{rhs(Ecuacion)}{2};$

$$EcuacionNormalizada := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) - 6\left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) + 9\, y(x) = e^{3x} \quad \textbf{(22)}$$

> $EcuacionHomogenea := lhs(EcuacionNormalizada) = 0;$

$$EcuacionHomogenea := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) - 6\left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) + 9\, y(x) = 0 \quad \textbf{(23)}$$

> $Q(x) := rhs(EcuacionNormalizada);$

$$Q(x) := e^{3x} \quad \textbf{(24)}$$

> $EcuacionCaracteristica := m \cdot \cdot 2 - 6 \cdot m + 9 = 0;$

$$EcuacionCaracteristica := m^2 - 6\, m + 9 = 0 \quad \textbf{(25)}$$

> $Raiz := solve(EcuacionCaracteristica);$

$$Raiz := 3, 3 \quad \textbf{(26)}$$

CASO II. raices reales e iguales

> $Sol1 := y(x) = \exp(Raiz_1 \cdot x); Sol2 := y(x) = x \cdot \exp(Raiz_1 \cdot x)$

$$Sol1 := y(x) = e^{3x}$$

$$Sol2 := y(x) = x\, e^{3x} \quad \textbf{(27)}$$

> $SolucionHomogenea := y(x) = C1 \cdot rhs(Sol1) + C2 \cdot rhs(Sol2)$

$$SolucionHomogenea := y(x) = C1\, e^{3x} + C2\, x\, e^{3x} \quad \textbf{(28)}$$

> $SolucionNoHomogenea := y(x) = A(x) \cdot rhs(Sol1) + B(x) \cdot rhs(Sol2);$

$$SolucionNoHomogenea := y(x) = A(x)\, e^{3x} + B(x)\, x\, e^{3x} \quad \textbf{(29)}$$

POR EL MÉTODO DE PARÁMETROS VARIABLES

> $with(linalg):$

> $AA := wronskian([rhs(Sol1), rhs(Sol2)], x);$

$$AA := \begin{bmatrix} e^{3x} & x\, e^{3x} \\ 3\, e^{3x} & e^{3x} + 3\, x\, e^{3x} \end{bmatrix} \quad \textbf{(30)}$$

> $BB := array([0, Q(x)])$

$$BB := \begin{bmatrix} 0 & e^{3x} \end{bmatrix} \quad \textbf{(31)}$$

> $SOL := linsolve(AA, BB)$

$$SOL := \begin{bmatrix} -x & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(32)}$$

> $Aprima := SOL_1; Bprima := SOL_2;$

$$Aprima := -x$$

$$Bprima := 1 \quad \textbf{(33)}$$

> $A(x) := int(Aprima, x) + C1; B(x) := int(Bprima, x) + C2;$

$$A(x) := -\frac{1}{2}\, x^2 + C1$$

$$B(x) := x + C2 \quad \textbf{(34)}$$

> $simplify(SolucionNoHomogenea);$

**(35)**

$$y(x) = \frac{1}{2}\, e^{3x}\left(x^2 + 2\, C1 + 2\, x\, C2\right) \tag{35}$$

**FIN RESPÚESTA 3)**

> *restart*

**4) Resuelva el problema de valores iniciales**

> $Sistema := diff(x(t), t) = -5\cdot x(t) - y(t), diff(y(t), t) = 4\cdot x(t) - y(t) : Sistema_1; Sistema_2;$

$$\frac{d}{dt}\, x(t) = -5\, x(t) - y(t)$$

$$\frac{d}{dt}\, y(t) = 4\, x(t) - y(t) \tag{36}$$

> $Condiciones := x(1) = 0, y(1) = 1;$

$$Condiciones := x(1) = 0, y(1) = 1 \tag{37}$$

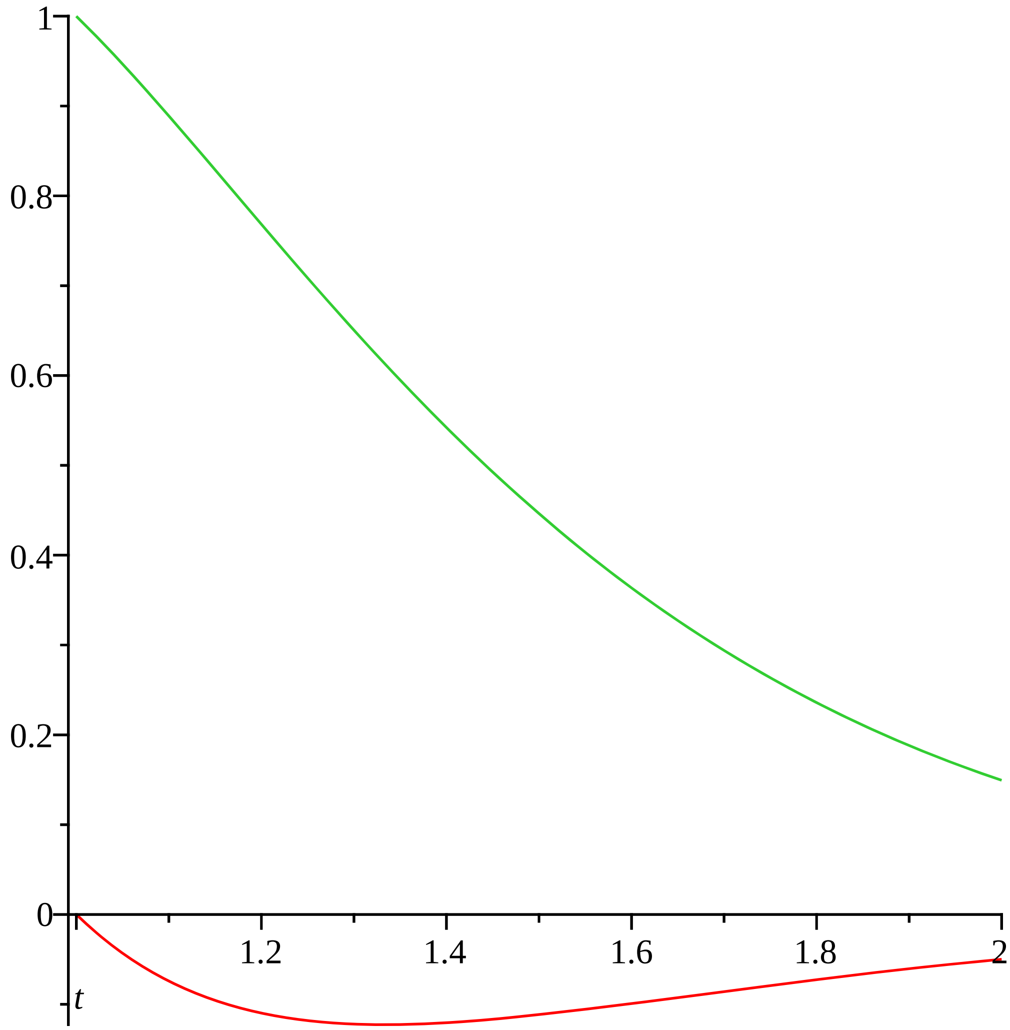
**RESPUESTA 4)**

> $Solucion := dsolve(\{Sistema, Condiciones\}) : Solucion_1; Solucion_2;$

$$x(t) = e^{-3t}\left(\frac{1}{e^{-3}} - \frac{t}{e^{-3}}\right)$$

$$y(t) = -e^{-3t}\left(\frac{1}{e^{-3}} - \frac{2\, t}{e^{-3}}\right) \tag{38}$$

> $plot([rhs(Solucion_1), rhs(Solucion_2)], t = 1..2);$




**FIN RESPUESTA 4)**

> *restart*

**5) Resuelva el problema de valor inicial**

> $Ecuacion := diff(y(t), t) = -2 \cdot y(t) + \exp(-t+2) \cdot \mathrm{Heaviside}(t-2);$

$$Ecuacion := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, y(t) = -2\, y(t) + \mathrm{e}^{-t+2}\, \mathrm{Heaviside}(t-2) \quad \textbf{(39)}$$

> $Condicion := y(0) = 3;$

$$Condicion := y(0) = 3 \quad \textbf{(40)}$$

**RESPUESTA 5)**

> $with(inttrans):$

> $TransLapEcuacion := subs(Condicion, laplace(Ecuacion, t, s));$

$$TransLapEcuacion := s\, laplace(y(t), t, s) - 3 = -2\, laplace(y(t), t, s) + \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{1+s} \quad \textbf{(41)}$$

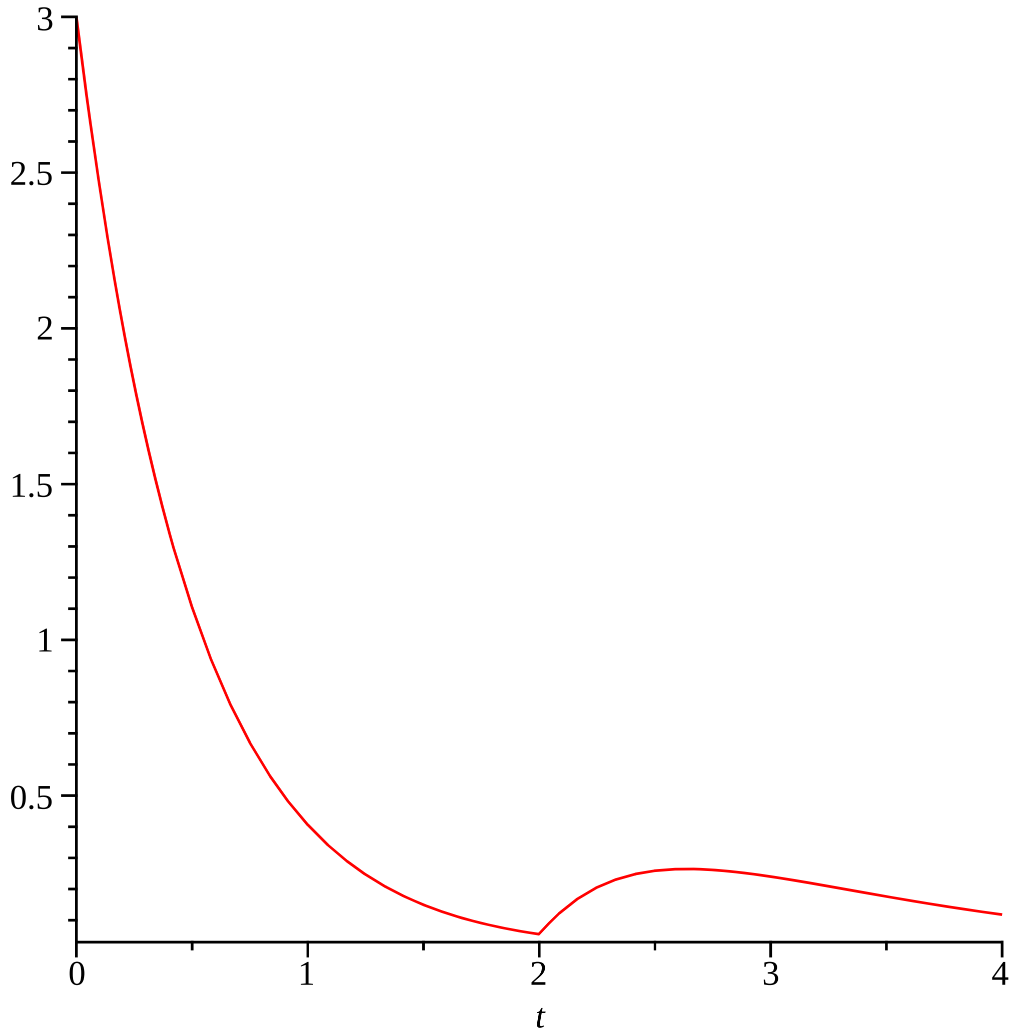
> $TransLapSolucion := simplify(isolate(TransLapEcuacion, laplace(y(t), t, s)));$

$$TransLapSolucion := laplace(y(t), t, s) = \frac{3 + 3\, s + \mathrm{e}^{-2s}}{(1+s)\,(s+2)} \quad \textbf{(42)}$$

> $Solucion := invlaplace(TransLapSolucion, s, t)$

$$Solucion := y(t) = 3\, \mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{Heaviside}(t-2)\left(-\mathrm{e}^{-2t+4} + \mathrm{e}^{-t+2}\right) \quad \textbf{(43)}$$

> $plot(rhs(Solucion), t = 0..4);$




**FIN RESPUESTA 5)**

> $restart$

**6) Obtener la función inversa**

> $F(s) := \frac{(s - 3\cdot\exp(-s))}{s\cdot\cdot 2 + 6\cdot s + 16};$

$$F(s) := \frac{s - 3\,e^{-s}}{s^2 + 6\,s + 16} \qquad \textbf{(44)}$$

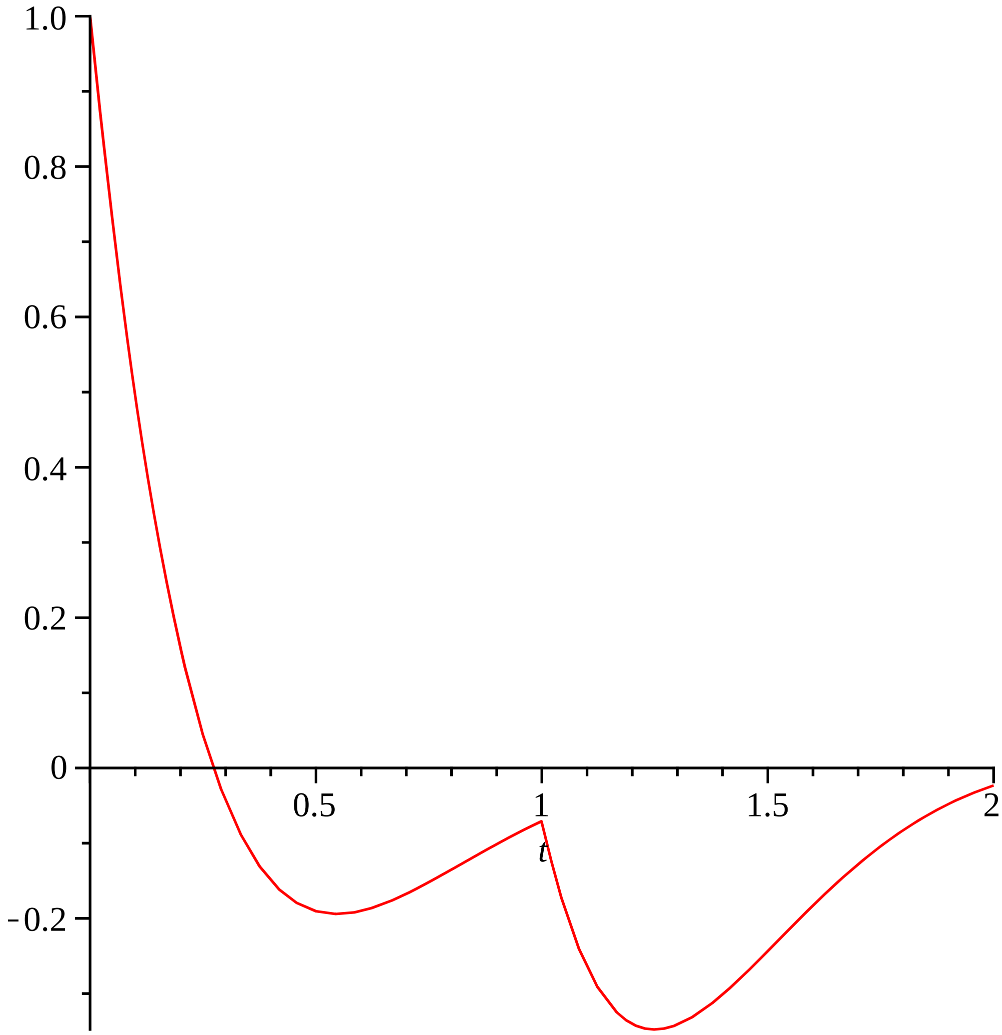
**RESPUESTA 6)**

> $with(inttrans):$

> $f(t) := invlaplace(F(s), s, t)$

$$f(t) := -\frac{3}{7}\,\mathrm{Heaviside}(t-1)\,\sqrt{7}\,e^{-3t+3}\sin\left(\sqrt{7}\,(t-1)\right) + \frac{1}{7}\,\left(7\cos\left(\sqrt{7}\,t\right) - 3\sqrt{7}\,\sin\left(\sqrt{7}\,t\right)\right)e^{-3t} \qquad \textbf{(45)}$$

> $plot(f(t), t = 0..2)$




**FIN RESPUESTA 6)**

> *restart*

**7) Resuelva la ecuación en derivadas parciales, para una cosntante de separacion positiva**

> $Ecuacion := diff\,(u(x,t), x\$2) - u(x,t) = diff\,(u(x,t), t)$

$$Ecuacion := \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,t) - u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\, u(x,t) \quad \textbf{(46)}$$

**RESPUESTA 7)**

> $EcuacionSeparable := simplify(eval(subs(u(x,t) = F(x) \cdot G(t), Ecuacion)))$

$$EcuacionSeparable := G(t)\left(\frac{d^2}{dx^2}\, F(x) - F(x)\right) = F(x)\left(\frac{d}{dt}\, G(t)\right) \quad \textbf{(47)}$$

OPCIÓN UNO

> $EcuacionSeparada := \frac{lhs(EcuacionSeparable)}{F(x) \cdot G(t)} = \frac{rhs(EcuacionSeparable)}{F(x) \cdot G(t)}$

$$EcuacionSeparada := \frac{\frac{d^2}{dx^2}\, F(x) - F(x)}{F(x)} = \frac{\frac{d}{dt}\, G(t)}{G(t)} \quad \textbf{(48)}$$

> $EcuacionX := lhs(EcuacionSeparada) = \mathrm{alpha};\; EcuacionT := rhs(EcuacionSeparada)$

= alpha;

$$EcuacionX := \frac{\frac{d^2}{dx^2} F(x) - F(x)}{F(x)} = \alpha$$

$$EcuacionT := \frac{\frac{d}{dt} G(t)}{G(t)} = \alpha \qquad \textbf{(49)}$$

> *SolucionXpositiva* := *dsolve*(*subs*(alpha = beta· ·2, *EcuacionX*)); *SolucionTpositiva* := *dsolve*(*subs*(alpha = beta· ·2, *EcuacionT*));

$$SolucionXpositiva := F(x) = \_C1 \sin\left(\sqrt{-1-\beta^2}\, x\right) + \_C2 \cos\left(\sqrt{-1-\beta^2}\, x\right)$$

$$SolucionTpositiva := G(t) = \_C1\, e^{\beta^2 t} \qquad \textbf{(50)}$$

> *SolucionGeneralPositiva* := *u*(*x*, *t*) = *rhs*(*SolucionXpositiva*)·*subs*(_C1 = 1, *rhs*(*SolucionTpositiva*));

$$SolucionGeneralPositiva := u(x,t) = \left(\_C1 \sin\left(\sqrt{-1-\beta^2}\, x\right) + \_C2 \cos\left(\sqrt{-1-\beta^2}\, x\right)\right) e^{\beta^2 t} \qquad \textbf{(51)}$$

OPCIÓN DOS

> *EcuacionSeparadaDos* := *simplify*$\left(\frac{(lhs(EcuacionSeparable) + F(x)\cdot G(t))}{F(x)\cdot G(t)}\right)$ = *simplify*$\left(\frac{(rhs(EcuacionSeparable) + F(x)\cdot G(t))}{F(x)\cdot G(t)}\right)$

$$EcuacionSeparadaDos := \frac{\frac{d^2}{dx^2} F(x)}{F(x)} = \frac{\frac{d}{dt} G(t) + G(t)}{G(t)} \qquad \textbf{(52)}$$

> *EcuacionXdos* := *lhs*(*EcuacionSeparadaDos*) = alpha; *EcuacionTdos* := *rhs*(*EcuacionSeparadaDos*) = alpha;

$$EcuacionXdos := \frac{\frac{d^2}{dx^2} F(x)}{F(x)} = \alpha$$

$$EcuacionTdos := \frac{\frac{d}{dt} G(t) + G(t)}{G(t)} = \alpha \qquad \textbf{(53)}$$

> *SolucionXdosPositiva* := *dsolve*(*subs*(alpha = beta· ·2, *EcuacionXdos*)); *SolucionTdosPositiva* := *dsolve*(*subs*(alpha = beta· ·2, *EcuacionTdos*));

$$SolucionXdosPositiva := F(x) = \_C1\, e^{-\beta x} + \_C2\, e^{\beta x}$$

$$SolucionTdosPositiva := G(t) = \_C1\, e^{(\beta-1)(\beta+1) t} \qquad \textbf{(54)}$$

> *SolucionGeneralDosPositiva* := *u*(*x*, *t*) = *rhs*(*SolucionXdosPositiva*)·*subs*(_C1 = 1, *rhs*(*SolucionTdosPositiva*));

$$SolucionGeneralDosPositiva := u(x,t) = \left(\_C1\, e^{-\beta x} + \_C2\, e^{\beta x}\right) e^{(\beta-1)(\beta+1) t} \qquad \textbf{(55)}$$

>

**FIN REPUESTA 7)**

> *restart*

**FIN EXAMEN FINAL**

L>