>

SOLUCION

FACULTA DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
ECUACIONES DIFERENCIALES
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO
SEMESTRE 2012-1

EXAMEN TIPO "B"
2011-12-05

> *restart*

1) Resuelva la ecuación diferencial

> $Ecuacion := (x\cdot\cdot 4 + y(x)\cdot\cdot 4) + (2\cdot x\cdot y(x)\cdot\cdot 3)\cdot diff(y(x), x) = 0$

$$Ecuacion := x^4 + y(x)^4 + 2\,x\,y(x)^3 \left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = 0 \quad (1)$$

RESPUESTA 1)

> $with(DEtools):$

> $odeadvisor(Ecuacion);$

$$[[\_homogeneous, class\ A], \_rational, \_Bernoulli] \quad (2)$$

> $intfactor(Ecuacion)$

$$x \quad (3)$$

RESOLVIENDO POR FACTOR INTEGRANTE

> $FactInt := x$

$$FactInt := x \quad (4)$$

> $M(x, y) := (x\cdot\cdot 4 + y\cdot\cdot 4); N(x, y) := (2\cdot x\cdot y\cdot\cdot 3);$

$$M(x, y) := x^4 + y^4$$

$$N(x, y) := 2\,y^3\,x \quad (5)$$

> $ComprobacionNoExacta := simplify(diff(M(x, y), y) - diff(N(x, y), x)) = 0$

$$ComprobacionNoExacta := 2\,y^3 = 0 \quad (6)$$

> $MM(x, y) := expand(FactInt\cdot M(x, y)); NN(x, y) := expand(FactInt\cdot N(x, y));$

$$MM(x, y) := x^5 + y^4\,x$$

$$NN(x, y) := 2\,y^3\,x^2 \quad (7)$$

> $ComprobacionExacta := simplify(diff(MM(x, y), y) - diff(NN(x, y), x)) = 0;$

$$ComprobacionExacta := 0 = 0 \quad (8)$$

> $IntMM := int(MM(x, y), x);$

$$IntMM := \frac{1}{6}\,x^6 + \frac{1}{2}\,y^4\,x^2 \quad (9)$$

> $SolucionUno := IntMM + int((NN(x, y) - diff(IntMM, y)), y) = C1;$

$$SolucionUno := \frac{1}{6}\,x^6 + \frac{1}{2}\,y^4\,x^2 = C1 \quad (10)$$

> $SolucionGeneralUno := lhs(SolucionUno)\cdot 6 = C1$

$$SolucionGeneralUno := x^6 + 3\,y^4\,x^2 = C1 \quad (11)$$

RESOLVIENDO POR COEFICIENTES HOMOGENEOS

> $Ecuacion;$

(12)

$$x^4 + y(x)^4 + 2\,x\,y(x)^3 \left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = 0 \quad (12)$$

> EcuacionSeparable := simplify(isolate(simplify(eval(subs(y(x) = x·u(x), Ecuacion))), diff(u(x), x)))

$$EcuacionSeparable := \frac{d}{dx}\,u(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{1 + 3\,u(x)^4}{u(x)^3\,x} \quad (13)$$

> $P(u) := \frac{1 + 3\,u^4}{2 \cdot u^3}$

$$P(u) := \frac{1}{2}\,\frac{1 + 3\,u^4}{u^3} \quad (14)$$

> $SolucionDos := int\left(\frac{1}{P(u)}, u\right) + int\left(\frac{1}{x}, x\right) = C2$

$$SolucionDos := \frac{1}{6}\,\ln\left(1 + 3\,u^4\right) + \ln(x) = C2 \quad (15)$$

> $SolucionTres := simplify\left(\exp\left(subs\left(u = \frac{y}{x}, lhs(SolucionDos) \cdot 6\right)\right)\right) = C2$

$$SolucionTres := \left(x^4 + 3\,y^4\right)\,x^2 = C2 \quad (16)$$

> SolucionGeneralDos := expand(SolucionTres)

$$SolucionGeneralDos := x^6 + 3\,y^4\,x^2 = C2 \quad (17)$$

>

FIN RESPUESTA 1)

> restart :

2) Resuelva la ecuación diferencial

> Ecuacion := diff((x·diff(y(x), x) − y(x)), x) = x··(−2)

$$Ecuacion := x\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) = \frac{1}{x^2} \quad (18)$$

RESPUESTA 2)

> $Ecuacion2 := \frac{lhs(Ecuacion)}{x} = \frac{rhs(Ecuacion)}{x}$;

$$Ecuacion2 := \frac{d^2}{dx^2}\,y(x) = \frac{1}{x^3} \quad (19)$$

> Solucion := dsolve(Ecuacion2);

$$Solucion := y(x) = \frac{1}{2\,x} + \_C1\,x + \_C2 \quad (20)$$

FIN RESPUESTA 2)

> restart

3) Resuelva la ecuación diferencial

> Ecuacion := 3·diff(y(x), x$2) − 24·diff(y(x), x) + 48·y(x) = 3·exp(4·x)

$$Ecuacion := 3\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) - 24\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + 48\,y(x) = 3\,e^{4\,x} \quad (21)$$

RESPUESTA 3)

> $EcuacionNormalizada := \frac{lhs(Ecuacion)}{3} = \frac{rhs(Ecuacion)}{3};$

$$EcuacionNormalizada := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) - 8\left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) + 16\, y(x) = e^{4x} \quad \textbf{(22)}$$

> $EcuacionHomogenea := lhs(EcuacionNormalizada) = 0;$

$$EcuacionHomogenea := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) - 8\left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) + 16\, y(x) = 0 \quad \textbf{(23)}$$

> $Q(x) := rhs(EcuacionNormalizada);$

$$Q(x) := e^{4x} \quad \textbf{(24)}$$

> $EcuacionCaracteristica := m\cdot\cdot 2 - 8\cdot m + 16 = 0;$

$$EcuacionCaracteristica := m^2 - 8\, m + 16 = 0 \quad \textbf{(25)}$$

> $Raiz := solve(EcuacionCaracteristica);$

$$Raiz := 4, 4 \quad \textbf{(26)}$$

CASO II. raices reales e iguales

> $Sol1 := y(x) = \exp(Raiz_1\cdot x);\ Sol2 := y(x) = x\cdot\exp(Raiz_1\cdot x)$

$$Sol1 := y(x) = e^{4x}$$

$$Sol2 := y(x) = x\, e^{4x} \quad \textbf{(27)}$$

> $SolucionHomogenea := y(x) = C1\cdot rhs(Sol1) + C2\cdot rhs(Sol2)$

$$SolucionHomogenea := y(x) = C1\, e^{4x} + C2\, x\, e^{4x} \quad \textbf{(28)}$$

> $SolucionNoHomogenea := y(x) = A(x)\cdot rhs(Sol1) + B(x)\cdot rhs(Sol2);$

$$SolucionNoHomogenea := y(x) = A(x)\, e^{4x} + B(x)\, x\, e^{4x} \quad \textbf{(29)}$$

POR EL MÉTODO DE PARÁMETROS VARIABLES

> $with(linalg):$

> $AA := wronskian([rhs(Sol1), rhs(Sol2)], x);$

$$AA := \begin{bmatrix} e^{4x} & x\, e^{4x} \\ 4\, e^{4x} & e^{4x} + 4\, x\, e^{4x} \end{bmatrix} \quad \textbf{(30)}$$

> $BB := array([0, Q(x)])$

$$BB := \begin{bmatrix} 0 & e^{4x} \end{bmatrix} \quad \textbf{(31)}$$

> $SOL := linsolve(AA, BB)$

$$SOL := \begin{bmatrix} -x & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(32)}$$

> $Aprima := SOL_1;\ Bprima := SOL_2;$

$$Aprima := -x$$

$$Bprima := 1 \quad \textbf{(33)}$$

> $A(x) := int(Aprima, x) + C1;\ B(x) := int(Bprima, x) + C2;$

$$A(x) := -\frac{1}{2}\, x^2 + C1$$

$$B(x) := x + C2 \quad \textbf{(34)}$$

> $simplify(SolucionNoHomogenea);$

(35)

$$y(x) = \frac{1}{2} e^{4x} \left(x^2 + 2\, C1 + 2\, x\, C2\right) \quad (35)$$

FIN RESPÚESTA 3)

> *restart*

4) Resuelva el problema de valores iniciales

> $Sistema := diff(x(t), t) = -5 \cdot x(t) - y(t), diff(y(t), t) = 4 \cdot x(t) - y(t) : Sistema_1; Sistema_2;$

$$\frac{d}{dt} x(t) = -5\, x(t) - y(t)$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = 4\, x(t) - y(t) \quad (36)$$

> $Condiciones := x(0) = 1, y(1) = 1;$

$$Condiciones := x(0) = 1, y(1) = 1 \quad (37)$$

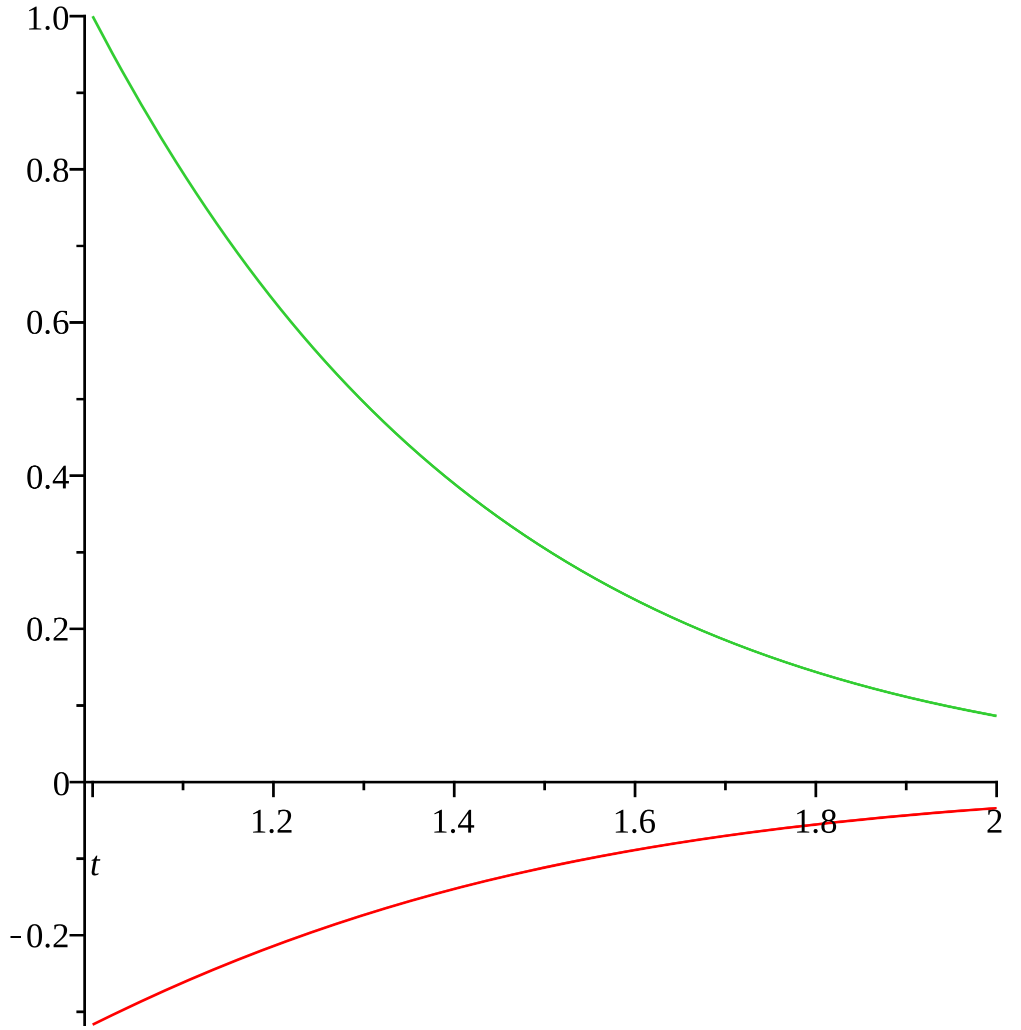
RESPUESTA 4)

> $Solucion := simplify(dsolve(\{Sistema, Condiciones\})) : Solucion_1; Solucion_2;$

$$x(t) = -\frac{1}{3} e^{-3t} \left(-3 + 2\, t + t\, e^3\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{3} \left(-4 + 4\, t + 2\, t\, e^3 + e^3\right) e^{-3t} \quad (38)$$

> $plot([rhs(Solucion_1), rhs(Solucion_2)], t = 1..2);$



FIN RESPUESTA 4)

> *restart*

5) Resuelva el problema de valor inicial

> $Ecuacion := diff(y(t),t) = -3\cdot y(t) + \exp(-t+3)\cdot \text{Heaviside}(t-3);$

$$Ecuacion := \frac{d}{dt}\, y(t) = -3\, y(t) + e^{-t+3}\, \text{Heaviside}(t-3) \qquad (39)$$

> $Condicion := y(0) = 4;$

$$Condicion := y(0) = 4 \qquad (40)$$

RESPUESTA 5)

> $with(inttrans):$

> $TransLapEcuacion := subs(Condicion, laplace(Ecuacion, t, s));$

$$TransLapEcuacion := s\, laplace(y(t), t, s) - 4 = -3\, laplace(y(t), t, s) + \frac{e^{-3s}}{1+s} \qquad (41)$$

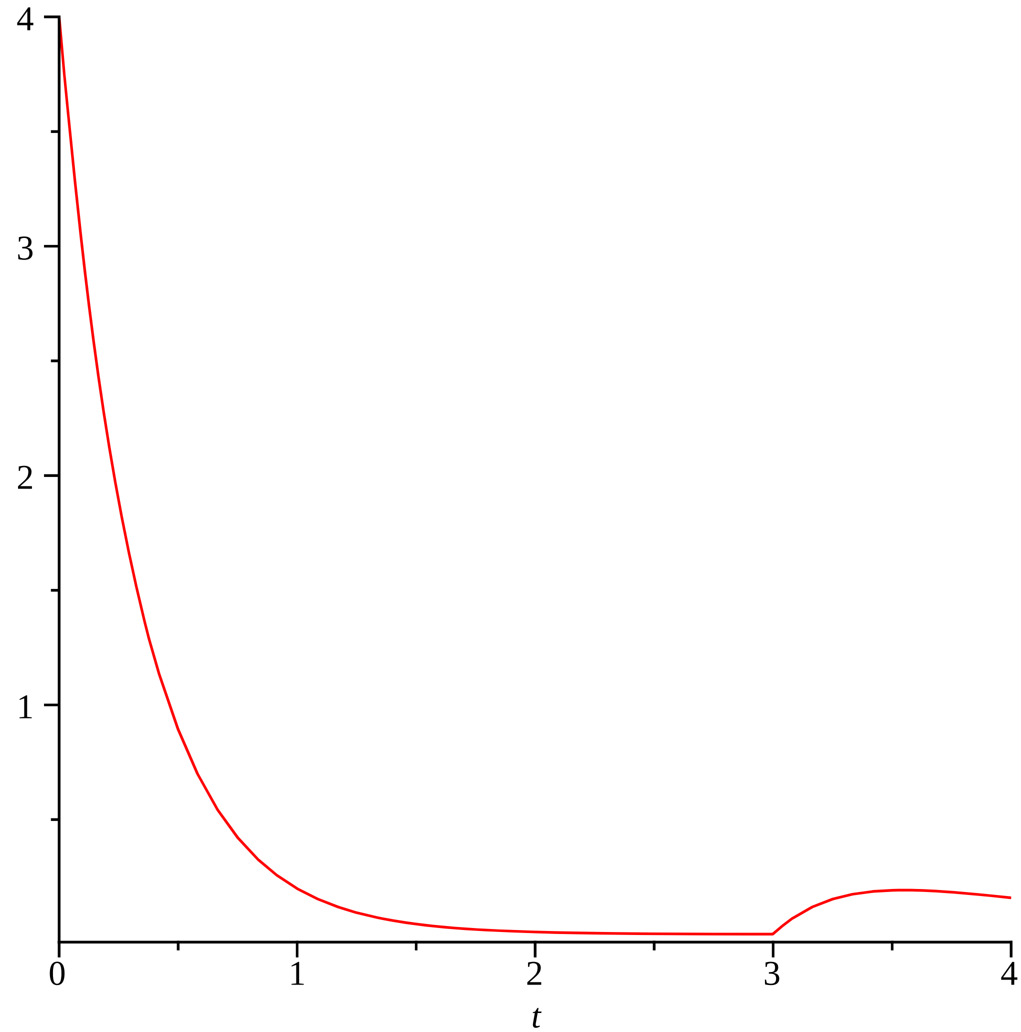
> $TransLapSolucion := simplify(isolate(TransLapEcuacion, laplace(y(t), t, s)));$

$$TransLapSolucion := laplace(y(t), t, s) = \frac{4 + 4s + e^{-3s}}{(1+s)\,(s+3)} \qquad (42)$$

> $Solucion := invlaplace(TransLapSolucion, s, t)$

$$Solucion := y(t) = 4\, e^{-3t} + \text{Heaviside}(t-3)\, e^{-2t+6}\, \sinh(t-3) \qquad (43)$$

> $plot(rhs(Solucion), t = 0..4);$



FIN RESPUESTA 5)

> $restart$

6) Obtener la función inversa

> $F(s) := \frac{(s - 2 \cdot \exp(-s))}{s \cdot \cdot 2 + 4 \cdot s + 12};$

$$F(s) := \frac{s - 2\,\mathrm{e}^{-s}}{s^2 + 4\,s + 12} \quad \textbf{(44)}$$

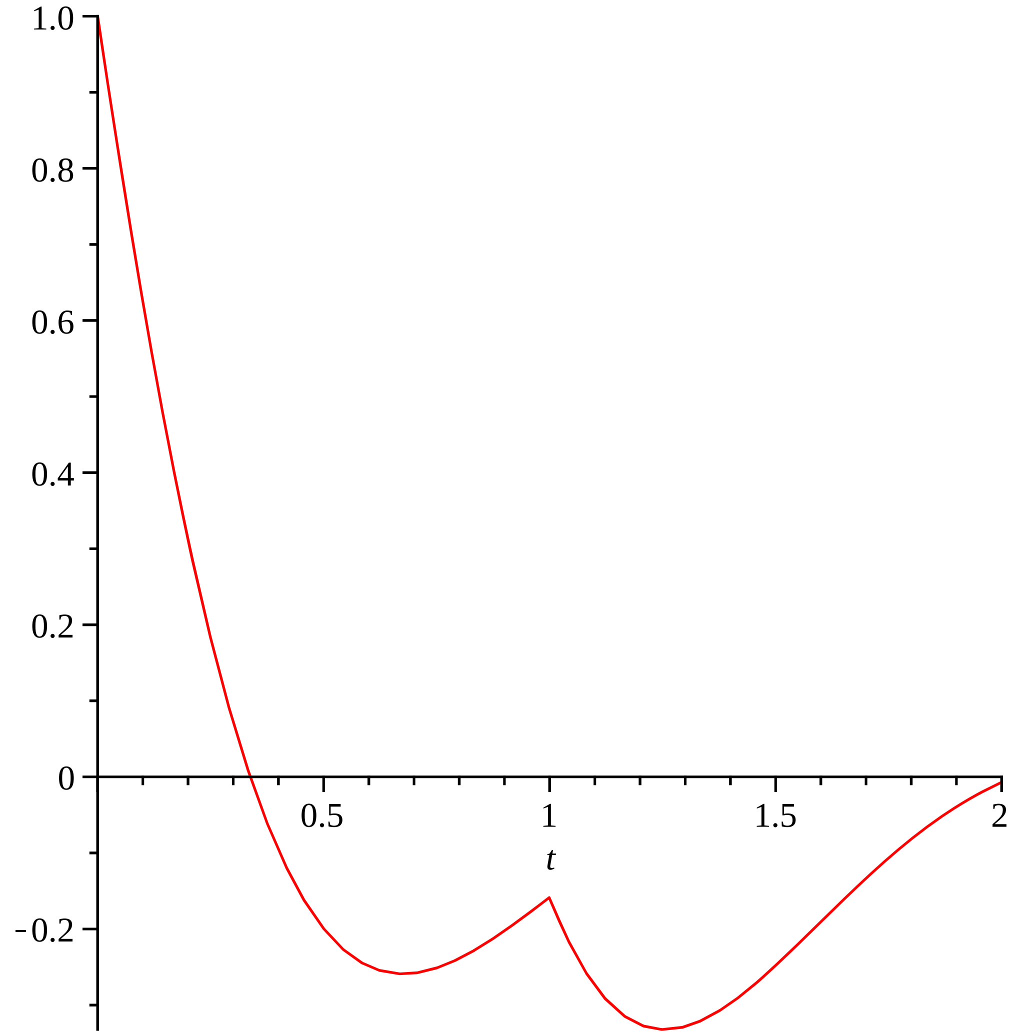
RESPUESTA 6)

> $with(inttrans):$

> $f(t) := invlaplace(F(s), s, t)$

$$f(t) := -\frac{1}{2}\,\mathrm{Heaviside}(t-1)\,\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-2t+2}\sin\left(2\sqrt{2}\,(t-1)\right) + \frac{1}{2}\left(2\cos\left(2\sqrt{2}\,t\right) - \sqrt{2}\,\sin\left(2\sqrt{2}\,t\right)\right)\mathrm{e}^{-2t} \quad \textbf{(45)}$$

> $plot(f(t), t = 0..2)$



FIN RESPUESTA 6)

> *restart*

7) Resuelva la ecuación en derivadas parciales, para una cosntante de separacion positiva

> $Ecuacion := diff\,(u(y,t), y\$2) = u(y,t) + diff\,(u(y,t), t)$

$$Ecuacion := \frac{\partial^2}{\partial y^2}\, u(y,t) = u(y,t) + \frac{\partial}{\partial t}\, u(y,t) \qquad \textbf{(46)}$$

RESPUESTA 7)

> $EcuacionSeparable := simplify(eval(subs(u(y,t) = F(y)\cdot G(t), Ecuacion)))$

$$EcuacionSeparable := \left(\frac{d^2}{dy^2}\, F(y)\right) G(t) = F(y)\,\left(G(t) + \frac{d}{dt}\, G(t)\right) \qquad \textbf{(47)}$$

OPCIÓN UNO

> $EcuacionSeparada := \frac{lhs(EcuacionSeparable)}{F(y)\cdot G(t)} = \frac{rhs(EcuacionSeparable)}{F(y)\cdot G(t)}$

$$EcuacionSeparada := \frac{\frac{d^2}{dy^2}\, F(y)}{F(y)} = \frac{G(t) + \frac{d}{dt}\, G(t)}{G(t)} \qquad \textbf{(48)}$$

> $EcuacionY := lhs(EcuacionSeparada) = \mathrm{alpha};\ EcuacionT := rhs(EcuacionSeparada)$

= alpha;

$$EcuacionY := \frac{\frac{d^2}{dy^2} F(y)}{F(y)} = \alpha$$

$$EcuacionT := \frac{G(t) + \frac{d}{dt} G(t)}{G(t)} = \alpha \quad \textbf{(49)}$$

> *SolucionYnegativa* := *dsolve*(*subs*(alpha = −beta· ·2, *EcuacionY*)); *SolucionTnegativa* := *dsolve*(*subs*(alpha = −beta· ·2, *EcuacionT*));

$$SolucionYnegativa := F(y) = \_C1 \sin(\beta y) + \_C2 \cos(\beta y)$$

$$SolucionTnegativa := G(t) = \_C1\, e^{-(1+\beta^2)\, t} \quad \textbf{(50)}$$

> *SolucionGeneralNegartiva* := *u*(*y*, *t*) = *rhs*(*SolucionYnegativa*) · *subs*(_C1 = 1, *rhs*(*SolucionTnegativa*));

$$SolucionGeneralNegartiva := u(y, t) = (\_C1 \sin(\beta y) + \_C2 \cos(\beta y))\, e^{-(1+\beta^2)\, t} \quad \textbf{(51)}$$

OPCIÓN DOS

> *EcuacionSeparadaDos* := *simplify*((*lhs*(*EcuacionSeparable*) − *F*(*y*) · *G*(*t*)) / (*F*(*y*) · *G*(*t*))) = *simplify*((*rhs*(*EcuacionSeparable*) − *F*(*y*) · *G*(*t*)) / (*F*(*y*) · *G*(*t*)))

$$EcuacionSeparadaDos := \frac{\frac{d^2}{dy^2} F(y) - F(y)}{F(y)} = \frac{\frac{d}{dt} G(t)}{G(t)} \quad \textbf{(52)}$$

> *EcuacionYdos* := *lhs*(*EcuacionSeparadaDos*) = alpha; *EcuacionTdos* := *rhs*(*EcuacionSeparadaDos*) = alpha;

$$EcuacionYdos := \frac{\frac{d^2}{dy^2} F(y) - F(y)}{F(y)} = \alpha$$

$$EcuacionTdos := \frac{\frac{d}{dt} G(t)}{G(t)} = \alpha \quad \textbf{(53)}$$

> *SolucionYdosNegativa* := *dsolve*(*subs*(alpha = −beta· ·2, *EcuacionYdos*)); *SolucionTdosNegativa* := *dsolve*(*subs*(alpha = −beta· ·2, *EcuacionTdos*));

$$SolucionYdosNegativa := F(y) = \_C1 \sin\left(\sqrt{-1+\beta^2}\, y\right) + \_C2 \cos\left(\sqrt{-1+\beta^2}\, y\right)$$

$$SolucionTdosNegativa := G(t) = \_C1\, e^{-\beta^2 t} \quad \textbf{(54)}$$

> *SolucionGeneralDosNegartiva* := *u*(*y*, *t*) = *rhs*(*SolucionYdosNegativa*) · *subs*(_C1 = 1, *rhs*(*SolucionTdosNegativa*));

$$SolucionGeneralDosNegartiva := u(y, t) = \left(\_C1 \sin\left(\sqrt{-1+\beta^2}\, y\right) + \_C2 \cos\left(\sqrt{-1+\beta^2}\, y\right)\right) e^{-\beta^2 t} \quad \textbf{(55)}$$

>

FIN REPUESTA 7)

> *restart*

FIN EXAMEN FINAL

>