>

SOLUCION

>

UNAM
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
ECUACIONES DIFERENCIALES
SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO

TIPO"A"
2011-12-13

> *restart*

1) Obtenga la solución general de la ecuación diferencial

> $Ecuacion := (2 \cdot x \cdot y(x) \cdot \cdot 2 - y(x)) + x \cdot diff(y(x), x) = 0$

$$Ecuacion := 2\,x\,y(x)^2 - y(x) + x\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = 0 \quad \textbf{(1)}$$

RESPUESTA 1)

> $with(DEtools):$

> $odeadvisor(Ecuacion)$

$$[[\_homogeneous, class\ D], \_rational, \_Bernoulli] \quad \textbf{(2)}$$

OPCIÓN 1

> $intfactor(Ecuacion)$

$$\frac{1}{y(x)^2} \quad \textbf{(3)}$$

> $FactInt := \frac{1}{y \cdot \cdot 2}$

$$FactInt := \frac{1}{y^2} \quad \textbf{(4)}$$

> $M(x, y) := 2\,x\,y^2 - y;\ N(x, y) := x$

$$M(x, y) := 2\,x\,y^2 - y$$
$$N(x, y) := x \quad \textbf{(5)}$$

> $comprobacionNoExacta := simplify(diff(M(x, y), y) - diff(N(x, y), x)) = 0;$

$$comprobacionNoExacta := 4\,x\,y - 2 = 0 \quad \textbf{(6)}$$

> $MM(x, y) := expand(FactInt \cdot M(x, y));\ NN(x, y) := expand(FactInt \cdot N(x, y))$

$$MM(x, y) := 2\,x - \frac{1}{y}$$
$$NN(x, y) := \frac{x}{y^2} \quad \textbf{(7)}$$

> $comprobacionExacta := simplify(diff(MM(x, y), y) - diff(NN(x, y), x)) = 0$

$$comprobacionExacta := 0 = 0 \quad \textbf{(8)}$$

> $IntMMx := int(MM(x, y), x);$

$$IntMMx := x^2 - \frac{x}{y} \quad \textbf{(9)}$$

> $SolucionGeneral := IntMMx + int((NN(x, y) - diff(IntMMx, y)), y) = C1$

(10)

$$SolucionGeneral := x^2 - \frac{x}{y} = C1 \quad \textbf{(10)}$$

FIN RESPUESTA 1)

> *restart*

2) La solución general de la ecuación diferencial de segundo orden

> $Ecuacion := diff(y(t), t\$2) + a \cdot diff(y(t), t) + b \cdot y(t) = f(t)$

$$Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + a\left(\frac{d}{dt} y(t)\right) + b\, y(t) = f(t) \quad \textbf{(11)}$$

está dada por la función

> $SolucionGeneral := y(t) = \exp(-2 \cdot t) \cdot t \cdot \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot t - \frac{1}{4} + C1 \cdot \exp(-2 \cdot t) + C2 \cdot t \cdot \exp(-2 \cdot t)$

$$SolucionGeneral := y(t) = e^{-2t} t^2 + \frac{1}{4} t - \frac{1}{4} + C1\, e^{-2t} + C2\, t\, e^{-2t} \quad \textbf{(12)}$$

con la información anterior obtenga los valores de a & b, así como f(t)

>

RESPUESTA 2)

> $sistema := diff(SolucionGeneral, t), diff(SolucionGeneral, t\$2) : sistema_1; sistema_2;$

$$\frac{d}{dt} y(t) = -2\, e^{-2t} t^2 + 2\, e^{-2t} t + \frac{1}{4} - 2\, C1\, e^{-2t} + C2\, e^{-2t} - 2\, C2\, t\, e^{-2t}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) = 4\, e^{-2t} t^2 - 8\, e^{-2t} t + 2\, e^{-2t} + 4\, C1\, e^{-2t} - 4\, C2\, e^{-2t} + 4\, C2\, t\, e^{-2t} \quad \textbf{(13)}$$

> $parametro := solve(\{sistema\}, \{C1, C2\}) : parametro_1; parametro_2;$

$$C1 = \frac{1}{4} \frac{1}{e^{-2t}} \left(-\left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) - 4\, e^{-2t} t + 2\, e^{-2t} - 4\left(\frac{d}{dt} y(t)\right) + 1 + 2\, t \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) + 4\, e^{-2t} t^2 + 4\, t \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) - t \right)$$

$$C2 = -\frac{1}{4} \frac{2\left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) + 8\, e^{-2t} t - 4\, e^{-2t} + 4\left(\frac{d}{dt} y(t)\right) - 1}{e^{-2t}} \quad \textbf{(14)}$$

> $EcuacionBuscada := simplify(subs(C1 = rhs(parametro_1), C2 = rhs(parametro_2), SolucionGeneral))$

$$EcuacionBuscada := y(t) = -\frac{1}{4} \frac{d^2}{dt^2} y(t) + \frac{1}{2} e^{-2t} - \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) + \frac{1}{4} t \quad \textbf{(15)}$$

> $EcuacionFinal := lhs(EcuacionBuscada) \cdot 4 + \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) + 4\left(\frac{d}{dt} y(t)\right) = rhs(EcuacionBuscada) \cdot 4 + \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) + 4\left(\frac{d}{dt} y(t)\right);$

$$EcuacionFinal := 4\, y(t) + \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 4\left(\frac{d}{dt} y(t)\right) = 2\, e^{-2t} + t \quad \textbf{(16)}$$

> $a := 4; b := 4; f(t) := rhs(EcuacionFinal);$

$$a := 4$$
$$b := 4$$
$$f(t) := 2\,e^{-2t} + t \tag{17}$$

> $Ecuacion;$

$$4\,y(t) + \frac{d^2}{dt^2}\,y(t) + 4\left(\frac{d}{dt}\,y(t)\right) = 2\,e^{-2t} + t \tag{18}$$

_C:comprobación

> $Solucion := dsolve(Ecuacion);$

$$Solucion := y(t) = e^{-2t}\_C2 + e^{-2t}\,t\_C1 + \frac{1}{4}\,(t-1)\,e^{-2t}\,e^{2t} + e^{-2t}\,t^2 \tag{19}$$

> $comprobacion2 := simplify(subs(\_C1 = C2, \_C2 = C1, rhs(Solucion)) - rhs(SolucionGeneral)) = 0$

$$comprobacion2 := 0 = 0 \tag{20}$$

>

FIN RESPUESTA 2)

> $restart$

3) Resuelva la ecuación diferencial

> $Ecuacion := diff(y(t), t\$2) - 2\cdot diff(y(t), t) + y(t) = \frac{\exp(t)}{t};$

$$Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2}\,y(t) - 2\left(\frac{d}{dt}\,y(t)\right) + y(t) = \frac{e^t}{t} \tag{21}$$

>

RESPUESTA 3)

> $EcuacionHomogenea := lhs(Ecuacion) = 0$

$$EcuacionHomogenea := \frac{d^2}{dt^2}\,y(t) - 2\left(\frac{d}{dt}\,y(t)\right) + y(t) = 0 \tag{22}$$

> $Q(t) := rhs(Ecuacion);$

$$Q(t) := \frac{e^t}{t} \tag{23}$$

> $EcuacionCaracteristica := m\cdot\cdot 2 - 2\cdot m + 1 = 0$

$$EcuacionCaracteristica := m^2 - 2\,m + 1 = 0 \tag{24}$$

> $Raiz := solve(EcuacionCaracteristica, m)$

$$Raiz := 1, 1 \tag{25}$$

CASO II

> $sol_1 := y(t) = \exp(Raiz_1\cdot t); sol_2 := y(t) = t\cdot\exp(Raiz_1\cdot t)$

$$sol_1 := y(t) = e^t$$
$$sol_2 := y(t) = t\,e^t \tag{26}$$

> $with(linalg):$

> $AA := wronskian([rhs(sol_1), rhs(sol_2)], t)$

(27)

$$AA := \begin{bmatrix} e^t & t\,e^t \\ e^t & e^t + t\,e^t \end{bmatrix} \quad (27)$$

> $BB := array([0, Q(t)]);$

$$BB := \begin{bmatrix} 0 & \frac{e^t}{t} \end{bmatrix} \quad (28)$$

> $SOL := linsolve(AA, BB)$

$$SOL := \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{t} \end{bmatrix} \quad (29)$$

> $Aprima := SOL_1; Bprima := SOL_2;$

$$Aprima := -1$$
$$Bprima := \frac{1}{t} \quad (30)$$

> $A(t) := int(Aprima, t) + C1; B(t) := int(Bprima, t) + C2;$

$$A(t) := -t + C1$$
$$B(t) := \ln(t) + C2 \quad (31)$$

> $SolucionGeneral := y(t) = simplify(A(t) \cdot rhs(sol_1) + B(t) \cdot rhs(sol_2))$

$$SolucionGeneral := y(t) = e^t\,(-t + C1 + t\ln(t) + t\,C2) \quad (32)$$

> $SolucionFinal := y(t) = C1 \cdot \exp(t) + C2 \cdot t \cdot \exp(t) + t \cdot \ln(t) \cdot \exp(t);$

$$SolucionFinal := y(t) = e^t\,C1 + t\,e^t\,C2 + t\,e^t\ln(t) \quad (33)$$

>

comprobacion

> $sol := simplify(dsolve(Ecuacion))$

$$sol := y(t) = e^t\,(\_C2 + t\,\_C1 - t + t\ln(t)) \quad (34)$$

FIN RESPUESTA 3)

> *restart*

4)Convierta el siguiente sistema de cuaciones diferenciales, a una ecuación diferencial, en términos de la variable x[2](t)

> $sistema := diff(x_1(t), t) = 2 \cdot x_1(t) - 4 \cdot x_2(t) + 4, diff(x_2(t), t) = x_1(t) - x_2(t) + \sin(t) :$
$sistema_1; sistema_2;$

$$\frac{d}{dt}\,x_1(t) = 2\,x_1(t) - 4\,x_2(t) + 4$$
$$\frac{d}{dt}\,x_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + \sin(t) \quad (35)$$

>

RESPUESTA 4)

> $incognita_2 := isolate(sistema_1, x_2(t))$

$$incognita_2 := x_2(t) = -\frac{1}{4}\,\frac{d}{dt}\,x_1(t) + \frac{1}{2}\,x_1(t) + 1 \quad (36)$$

> $EcuacionIntermedia := eval(subs(x_2(t) = rhs(incognita_2), lhs(sistema_2) - rhs(sistema_2) = 0))$

$$EcuacionIntermedia := -\frac{1}{4}\frac{d^2}{dt^2}x_1(t)+\frac{1}{4}\frac{d}{dt}x_1(t)-\frac{1}{2}x_1(t)+1-\sin(t)=0 \quad \mathbf{(37)}$$

> $EcuacionFinal := lhs(EcuacionIntermedia)\cdot(-4)-(-4+4\sin(t))$
> $= rhs(EcuacionIntermedia)\cdot(-4)-(-4+4\sin(t))$

$$EcuacionFinal := \frac{d^2}{dt^2}x_1(t)-\left(\frac{d}{dt}x_1(t)\right)+2x_1(t)=4-4\sin(t) \quad \mathbf{(38)}$$

>

FIN RESPUESTA 4)

> *restart*

5) Obtenga

>

a) la transformada de laplace de la convolución de las funciones siguientes:

> $f(t) := t\cdot\cdot 2\cdot\exp(2\cdot t);\ g(t) := \sinh(3\cdot t);$

$$f(t) := t^2 e^{2t}$$
$$g(t) := \sinh(3t) \quad \mathbf{(39)}$$

>

b) la transformada inversa de Laplace de la siguiente función

> $R(s) := \frac{1}{(s-3)\cdot(s\cdot\cdot 2+2\cdot s+2)};$

$$R(s) := \frac{1}{(s-3)\left(s^2+2s+2\right)} \quad \mathbf{(40)}$$

>

RESPUESTA 5a)

> $with(inttrans):$

> $F(s) := laplace(f(t), t, s);\ G(s) := laplace(g(t), t, s);$

$$F(s) := \frac{2}{(s-2)^3}$$
$$G(s) := \frac{3}{s^2-9} \quad \mathbf{(41)}$$

> $H(s) := F(s)\cdot G(s);$

$$H(s) := \frac{6}{(s-2)^3\left(s^2-9\right)} \quad \mathbf{(42)}$$

>

comprobacion

> $h(t) := convert(invlaplace(H(s), s, t), \exp);$

$$h(t) := e^{3t}+\frac{1}{125}e^{-3t}-\frac{3}{125}e^{2t}\left(40t+25t^2+42\right) \quad \mathbf{(43)}$$

> $hh(t) := simplify(convert(int(subs(t=\tau, f(t))\cdot subs(t=t-\tau, g(t)), \tau=0..t), \exp))$

$$hh(t) := \frac{1}{125}\left(125e^{6t}+1-120e^{5t}t-75e^{5t}t^2-126e^{5t}\right)e^{-3t} \quad \mathbf{(44)}$$

> $comprobacion_1 := simplify(h(t)-hh(t))=0;$

$$comprobacion_1 := 0=0 \quad \mathbf{(45)}$$

>

RESPUESTA 5b)

> $r(t) := invlaplace(R(s), s, t);$

$$r(t) := \frac{1}{17}\, e^{3t} - \frac{1}{17}\, e^{-t}\, (\cos(t) + 4\sin(t)) \qquad \textbf{(46)}$$

>

FIN RESPUESTA 5)

> *restart*

6) Obtenga la solución de la ecuación diferencial

> $Ecuacion := diff(x(t), t\$2) + 9 \cdot x(t) = -3 \cdot \mathrm{Dirac}\left(t - \frac{\mathrm{Pi}}{2}\right);$

$$Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2}\, x(t) + 9\, x(t) = -3\, \mathrm{Dirac}\left(t - \frac{1}{2}\, \pi\right) \qquad \textbf{(47)}$$

sujeta a las condiciones iniciales

> $Condiciones := x(0) = 1, \mathrm{D}(x)(0) = 0;$

$$Condiciones := x(0) = 1, \mathrm{D}(x)(0) = 0 \qquad \textbf{(48)}$$

>

RESPUESTA 6)

> $with(inttrans):$

> $TransLapEcuacion := subs(Condiciones, laplace(Ecuacion, t, s));$

$$TransLapEcuacion := s^2\, laplace(x(t), t, s) - s + 9\, laplace(x(t), t, s) = -3\, e^{-\frac{1}{2} s \pi} \qquad \textbf{(49)}$$

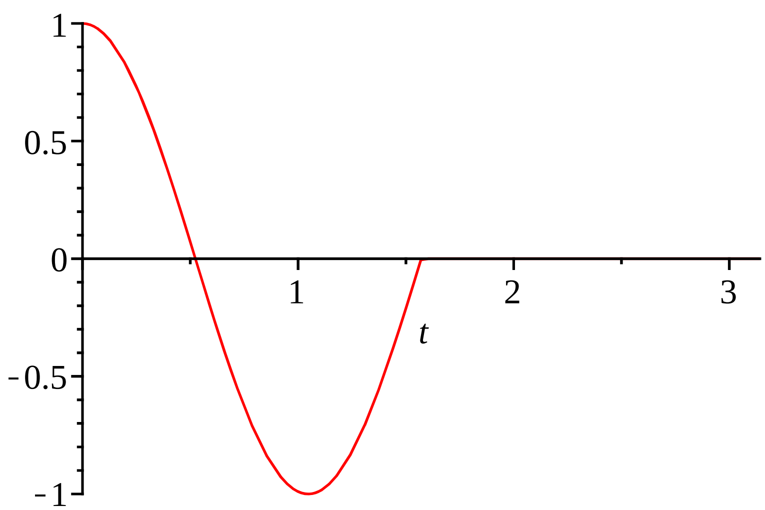
> $TransLapSolucion := simplify(isolate(TransLapEcuacion, laplace(x(t), t, s)));$

$$TransLapSolucion := laplace(x(t), t, s) = -\frac{3\, e^{-\frac{1}{2} s \pi} - s}{s^2 + 9} \qquad \textbf{(50)}$$

> $Solucion := invlaplace(TransLapSolucion, s, t);$

$$Solucion := x(t) = -\mathrm{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2}\, \pi\right) \cos(3\, t) + \cos(3\, t) \qquad \textbf{(51)}$$

> $plot(rhs(Solucion), t = 0..\mathrm{Pi});$



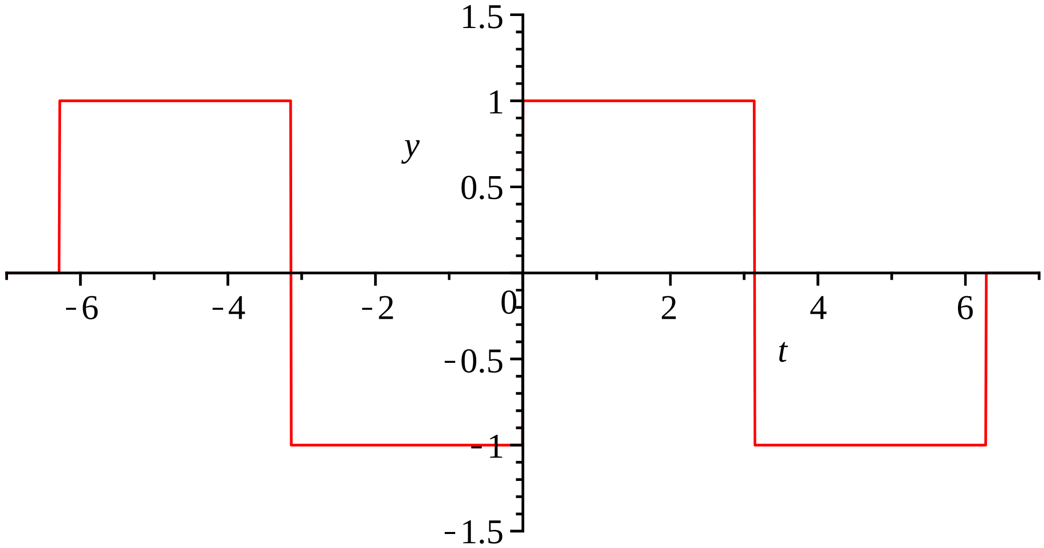
>

FIN RESPUESTA 6)

> *restart*

7) Obtenga los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier de la función que se muestra en la figura en el intervalo [-2*Pi..2*Pi]

> $f(t) := \text{Heaviside}(t+2\cdot\text{Pi}) - 2\cdot\text{Heaviside}(t+\text{Pi}) + 2\cdot\text{Heaviside}(t) - 2\cdot\text{Heaviside}(t-\text{Pi}) + \text{Heaviside}(t-2\cdot\text{Pi}) : plot(f(t), t=-7..7, y=-1.5..1.5)$



>

RESPUESTA 7)

> $L := 2\cdot\text{Pi};$

$$L := 2\pi \quad (52)$$

como es una función impar, entonces las Serie Trigonométrica será la SENO

> $a_0 := \left(\frac{1}{L}\right)\cdot int(f(t), t=-L..L); C := \frac{a_0}{2};$

$$a_0 := 0$$

$$C := 0 \quad (53)$$

> $a_n := \left(\frac{1}{L}\right)\cdot int\left(f(t)\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\text{Pi}\cdot t}{L}\right), t=-L..L\right);$

$$a_n := 0 \quad (54)$$

> $b_n := \left(\frac{1}{L}\right)\cdot int\left(f(t)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\text{Pi}\cdot t}{L}\right), t=-L..L\right);$

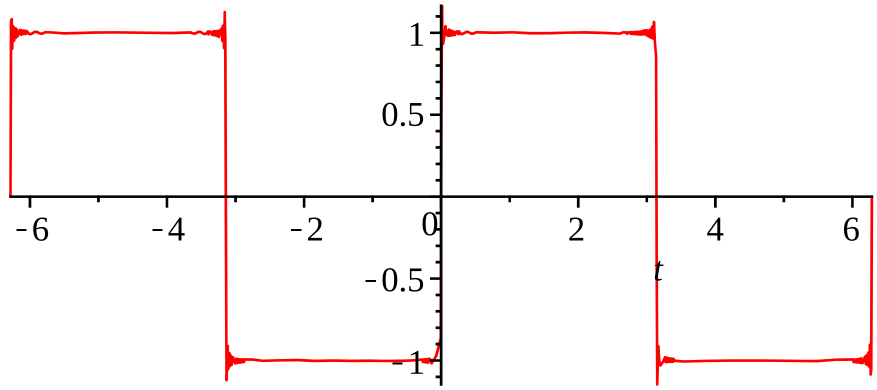
$$b_n := \frac{1}{2}\,\frac{4\cos(n\pi) - 8\cos\left(\frac{1}{2}n\pi\right) + 4}{\pi n} \quad (55)$$

> $STF := Sum\left(b_n\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\text{Pi}\cdot t}{L}\right), n=1..infinity\right)$

$$STF := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\,\frac{\left(4\cos(n\pi) - 8\cos\left(\frac{1}{2}n\pi\right) + 4\right)\sin\left(\frac{1}{2}nt\right)}{\pi n} \quad (56)$$

> $STF_{500} := sum\left(b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi} \cdot t}{L}\right), n = 1..500\right):$

> $plot(STF_{500}, t = -L..L)$



>

FIN RESPUESTA 7)

> *restart*

FIN EXAMEN

>

>