\>

SOLUCION

\>

UNAM
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
ECUACIONES DIFERENCIALES
SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO

TIPO"B"
2011-12-13

\> *restart*

1) Obtenga la solución general de la ecuación diferencial

\> $Ecuacion := (2\cdot x\cdot\cdot 2\cdot y(x) - x)\cdot diff(y(x), x) + y(x) = 0$

$$Ecuacion := \left(2\,x^2\,y(x) - x\right)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + y(x) = 0 \quad \textbf{(1)}$$

RESPUESTA 1)

\> $with(DEtools):$

\> $odeadvisor(Ecuacion)$

$$[[\_homogeneous, class\ G], \_rational, [\_Abel, 2nd\ type, class\ B]] \quad \textbf{(2)}$$

OPCIÓN 1

\> $FactInt := intfactor(Ecuacion)$

$$FactInt := \frac{1}{x^2} \quad \textbf{(3)}$$

\> $M(x, y) := y; N(x, y) := (2\cdot x\cdot\cdot 2\cdot y - x)$

$$M(x, y) := y$$

$$N(x, y) := 2\,x^2\,y - x \quad \textbf{(4)}$$

\> $comprobacionNoExacta := simplify(diff(M(x, y), y) - diff(N(x, y), x)) = 0;$

$$comprobacionNoExacta := 2 - 4\,x\,y = 0 \quad \textbf{(5)}$$

\> $MM(x, y) := simplify(FactInt\cdot M(x, y)); NN(x, y) := expand(FactInt\cdot N(x, y))$

$$MM(x, y) := \frac{y}{x^2}$$

$$NN(x, y) := 2\,y - \frac{1}{x} \quad \textbf{(6)}$$

\> $comprobacionExacta := simplify(diff(MM(x, y), y) - diff(NN(x, y), x)) = 0$

$$comprobacionExacta := 0 = 0 \quad \textbf{(7)}$$

\> $IntMMx := int(MM(x, y), x);$

$$IntMMx := -\frac{y}{x} \quad \textbf{(8)}$$

\> $SolucionGeneral := IntMMx + int((NN(x, y) - diff(IntMMx, y)), y) = C1$

$$SolucionGeneral := -\frac{y}{x} + y^2 = C1 \quad \textbf{(9)}$$

FIN RESPUESTA 1)

\> *restart*

2) La solución general de la ecuación diferencial de segundo orden

> $Ecuacion := diff(y(t), t\$2) + a \cdot diff(y(t), t) + b \cdot y(t) = f(t)$

$$Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + a \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) + b\, y(t) = f(t) \tag{10}$$

está dada por la función

> $SolucionGeneral := y(t) = \exp(-3 \cdot t) \cdot t \cdot \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot t - \frac{1}{4} + C1 \cdot \exp(-3 \cdot t) + C2 \cdot t \cdot \exp(-3 \cdot t)$

$$SolucionGeneral := y(t) = e^{-3t} t^2 + \frac{1}{4} t - \frac{1}{4} + C1\, e^{-3t} + C2\, t\, e^{-3t} \tag{11}$$

con la información anterior obtenga los valores de a & b, así como f(t)

>

RESPUESTA3) 2)

> $sistema := diff(SolucionGeneral, t), diff(SolucionGeneral, t\$2) : sistema_1; sistema_2;$

$$\frac{d}{dt} y(t) = -3\, e^{-3t} t^2 + 2\, e^{-3t} t + \frac{1}{4} - 3\, C1\, e^{-3t} + C2\, e^{-3t} - 3\, C2\, t\, e^{-3t}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) = 9\, e^{-3t} t^2 - 12\, e^{-3t} t + 2\, e^{-3t} + 9\, C1\, e^{-3t} - 6\, C2\, e^{-3t} + 9\, C2\, t\, e^{-3t} \tag{12}$$

> $parametro := solve(\{sistema\}, \{C1, C2\}) : parametro_1; parametro_2;$

$$C1 = \frac{1}{36} \frac{1}{e^{-3t}} \left(-4 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) - 24\, e^{-3t} t + 8\, e^{-3t} - 24 \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) + 6 + 12\, t \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) + 36\, e^{-3t} t^2 + 36\, t \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) - 9\, t\right)$$

$$C2 = -\frac{1}{12} \frac{4 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) + 24\, e^{-3t} t - 8\, e^{-3t} + 12 \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) - 3}{e^{-3t}} \tag{13}$$

> $EcuacionBuscada := simplify\left(subs\left(C1 = rhs\left(parametro_1\right), C2 = rhs\left(parametro_2\right), SolucionGeneral\right)\right)$

$$EcuacionBuscada := y(t) = -\frac{1}{12} - \frac{1}{9} \frac{d^2}{dt^2} y(t) + \frac{2}{9} e^{-3t} - \frac{2}{3} \frac{d}{dt} y(t) + \frac{1}{4} t \tag{14}$$

> $EcuacionFinal := lhs(EcuacionBuscada) \cdot 9 + \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) + 6 \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) = rhs(EcuacionBuscada) \cdot 9 + \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) + 6 \left(\frac{d}{dt} y(t)\right);$

$$EcuacionFinal := 9\, y(t) + \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 6 \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) = -\frac{3}{4} + 2\, e^{-3t} + \frac{9}{4} t \tag{15}$$

> $a := 6; b := 9; f(t) := rhs(EcuacionFinal);$

$$a := 6$$

$$b := 9$$

$$f(t) := -\frac{3}{4} + 2\, e^{-3t} + \frac{9}{4} t \tag{16}$$

> *Ecuacion*;

$$9\,y(t)+\frac{d^2}{dt^2}\,y(t)+6\left(\frac{d}{dt}\,y(t)\right)=-\frac{3}{4}+2\,e^{-3t}+\frac{9}{4}\,t \tag{17}$$

_C:comprobación

> *Solucion* := *dsolve*(*Ecuacion*);

$$Solucion:=y(t)=e^{-3t}\_C2+e^{-3t}\,t\_C1+\frac{1}{4}\,(t-1)\,e^{-3t}\,e^{3t}+e^{-3t}\,t^2 \tag{18}$$

> *comprobacion2* := *simplify*(*subs*(_C1 = C2, _C2 = C1, *rhs*(*Solucion*)) − *rhs*(*SolucionGeneral*)) = 0

$$comprobacion2:=0=0 \tag{19}$$

>

FIN RESPUESTA 2)

> *restart*

3) Resuelva la ecuación diferencial

> $Ecuacion := diff\,(y(t), t\$2)+2\cdot diff\,(y(t), t)+y(t)=\frac{\exp(-t)}{t}$;

$$Ecuacion:=\frac{d^2}{dt^2}\,y(t)+2\left(\frac{d}{dt}\,y(t)\right)+y(t)=\frac{e^{-t}}{t} \tag{20}$$

>

RESPUESTA 3)

> *EcuacionHomogenea* := *lhs*(*Ecuacion*) = 0

$$EcuacionHomogenea:=\frac{d^2}{dt^2}\,y(t)+2\left(\frac{d}{dt}\,y(t)\right)+y(t)=0 \tag{21}$$

> $Q(t) := rhs(Ecuacion)$;

$$Q(t):=\frac{e^{-t}}{t} \tag{22}$$

> *EcuacionCaracteristica* := $m\cdot\cdot 2+2\cdot m+1=0$

$$EcuacionCaracteristica:=m^2+2\,m+1=0 \tag{23}$$

> *Raiz* := *solve*(*EcuacionCaracteristica*, *m*)

$$Raiz:=-1,\,-1 \tag{24}$$

CASO II

> $sol_1 := y(t)=\exp\left(Raiz_1\cdot t\right);\ sol_2 := y(t)=t\cdot\exp\left(Raiz_1\cdot t\right)$

$$sol_1:=y(t)=e^{-t}$$

$$sol_2:=y(t)=t\,e^{-t} \tag{25}$$

> *with*(*linalg*) :

> $AA := wronskian\left(\left[rhs\left(sol_1\right), rhs\left(sol_2\right)\right], t\right)$

$$AA:=\begin{bmatrix} e^{-t} & t\,e^{-t} \\ -e^{-t} & e^{-t}-t\,e^{-t} \end{bmatrix} \tag{26}$$

> *BB* := *array*([0, *Q*(*t*)]);

(27)

$$BB := \begin{bmatrix} 0 & \frac{e^{-t}}{t} \end{bmatrix} \quad \textbf{(27)}$$

> $SOL := linsolve(AA, BB)$

$$SOL := \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{t} \end{bmatrix} \quad \textbf{(28)}$$

> $Aprima := SOL_1; Bprima := SOL_2;$

$$Aprima := -1$$
$$Bprima := \frac{1}{t} \quad \textbf{(29)}$$

> $A(t) := int(Aprima, t) + C1; B(t) := int(Bprima, t) + C2;$

$$A(t) := -t + C1$$
$$B(t) := \ln(t) + C2 \quad \textbf{(30)}$$

> $SolucionGeneral := y(t) = simplify\left(A(t) \cdot rhs\left(sol_1\right) + B(t) \cdot rhs\left(sol_2\right)\right)$

$$SolucionGeneral := y(t) = e^{-t}\,(-t + C1 + t\ln(t) + t\,C2) \quad \textbf{(31)}$$

> $SolucionFinal := y(t) = C1 \cdot \exp(-t) + C2 \cdot t \cdot \exp(-t) + t \cdot \ln(t) \cdot \exp(-t);$

$$SolucionFinal := y(t) = e^{-t}\,C1 + t\,e^{-t}\,C2 + t\,e^{-t}\ln(t) \quad \textbf{(32)}$$

>

comprobacion

> $sol := simplify(dsolve(Ecuacion))$

$$sol := y(t) = e^{-t}\,(\_C2 + t\,\_C1 - t + t\ln(t)) \quad \textbf{(33)}$$

FIN RESPUESTA 3)

> *restart*

4)Convierta el siguiente sistema de cuaciones diferenciales, a una ecuación diferencial, en términos de la variable x[2](t)

> $sistema := diff\left(x_1(t), t\right) = 2 \cdot x_1(t) - 4 \cdot x_2(t) + 4, diff\left(x_2(t), t\right) = x_1(t) - x_2(t) + \sin(t) :$
> $sistema_1; sistema_2;$

$$\frac{d}{dt}\, x_1(t) = 2\, x_1(t) - 4\, x_2(t) + 4$$
$$\frac{d}{dt}\, x_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + \sin(t) \quad \textbf{(34)}$$

>

RESPUESTA 4)

> $incognita_1 := isolate\left(sistema_2, x_1(t)\right)$

$$incognita_1 := x_1(t) = \frac{d}{dt}\, x_2(t) + x_2(t) - \sin(t) \quad \textbf{(35)}$$

> $EcuacionIntermedia := eval\left(subs\left(x_1(t) = rhs\left(incognita_1\right), lhs\left(sistema_1\right) - rhs\left(sistema_1\right) = 0\right)\right)$

$$EcuacionIntermedia := \frac{d^2}{dt^2}\, x_2(t) - \left(\frac{d}{dt}\, x_2(t)\right) - \cos(t) + 2\, x_2(t) + 2\sin(t) - 4 = 0 \quad \textbf{(36)}$$

> $EcuacionFinal := lhs(EcuacionIntermedia) - (-\cos(t) + 2\sin(t) - 4) = rhs(EcuacionIntermedia) - (-\cos(t) + 2\sin(t) - 4)$

$$EcuacionFinal := \frac{d^2}{dt^2} x_2(t) - \left(\frac{d}{dt} x_2(t)\right) + 2\, x_2(t) = \cos(t) - 2\sin(t) + 4 \quad \mathbf{(37)}$$

>

FIN RESPUESTA 4)

> *restart*

5) Obtenga

>

a) la transformada de laplace de la convolución de las funciones siguientes:

> $f(t) := t\cdot\cdot 3\cdot \exp(3\cdot t);\ g(t) := \sinh(2\cdot t);$

$$f(t) := t^3\, e^{3t}$$

$$g(t) := \sinh(2\,t) \quad \mathbf{(38)}$$

>

b) la transformada inversa de Laplace de la siguiente función

> $R(s) := \frac{1}{(s-2)\cdot(s\cdot\cdot 2 + 4\cdot s + 5)};$

$$R(s) := \frac{1}{(s-2)\,(s^2+4\,s+5)} \quad \mathbf{(39)}$$

>

RESPUESTA 5a)

> *with*(*inttrans*) :

> $F(s) := laplace(f(t), t, s);\ G(s) := laplace(g(t), t, s);$

$$F(s) := \frac{6}{(s-3)^4}$$

$$G(s) := \frac{2}{s^2-4} \quad \mathbf{(40)}$$

> $H(s) := F(s)\cdot G(s);$

$$H(s) := \frac{12}{(s-3)^4\,(s^2-4)} \quad \mathbf{(41)}$$

>

comprobacion

> $h(t) := convert(invlaplace(H(s), s, t), \exp);$

$$h(t) := 3\, e^{2t} - \frac{3}{625}\, e^{-2t} + \frac{2}{625}\, e^{3t}\,(125\, t^3 + 930\, t - 450\, t^2 - 936) \quad \mathbf{(42)}$$

> $hh(t) := simplify(convert(int(subs(t = \mathrm{tau}, f(t))\cdot subs(t = t-\mathrm{tau}, g(t)), \mathrm{tau} = 0..t), \exp))$

$$hh(t) := \frac{1}{625}\, e^{-2t}\,(1875\, e^{4t} - 3 - 900\, t^2\, e^{5t} + 1860\, t\, e^{5t} + 250\, t^3\, e^{5t} - 1872\, e^{5t}) \quad \mathbf{(43)}$$

> $comprobacion_1 := simplify(h(t) - hh(t)) = 0;$

$$comprobacion_1 := 0 = 0 \quad \mathbf{(44)}$$

>

RESPUESTA 5b)

> $r(t) := invlaplace(R(s), s, t);$

$$r(t) := \frac{1}{17}\, e^{2t} - \frac{1}{17}\, e^{-2t}\,(\cos(t) + 4\sin(t)) \quad \mathbf{(45)}$$

>

FIN RESPUESTA 5)

> *restart*

6) Obtenga la solución de la ecuación diferencial

> $Ecuacion := diff(x(t), t\$2) + 9\cdot x(t) = -3\cdot \mathrm{Dirac}\left(t - \frac{\mathrm{Pi}}{2}\right);$

$$Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2}\, x(t) + 9\, x(t) = -3\, \mathrm{Dirac}\left(t - \frac{1}{2}\,\pi\right) \quad \mathbf{(46)}$$

sujeta a las condiciones iniciales

> $Condiciones := x(0) = 1, \mathrm{D}(x)(0) = 0;$

$$Condiciones := x(0) = 1, \mathrm{D}(x)(0) = 0 \quad \mathbf{(47)}$$

>

RESPUESTA 6)

> $with(inttrans):$

> $TransLapEcuacion := subs(Condiciones, laplace(Ecuacion, t, s));$

$$TransLapEcuacion := s^2\, laplace(x(t), t, s) - s + 9\, laplace(x(t), t, s) = -3\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\, s\,\pi} \quad \mathbf{(48)}$$

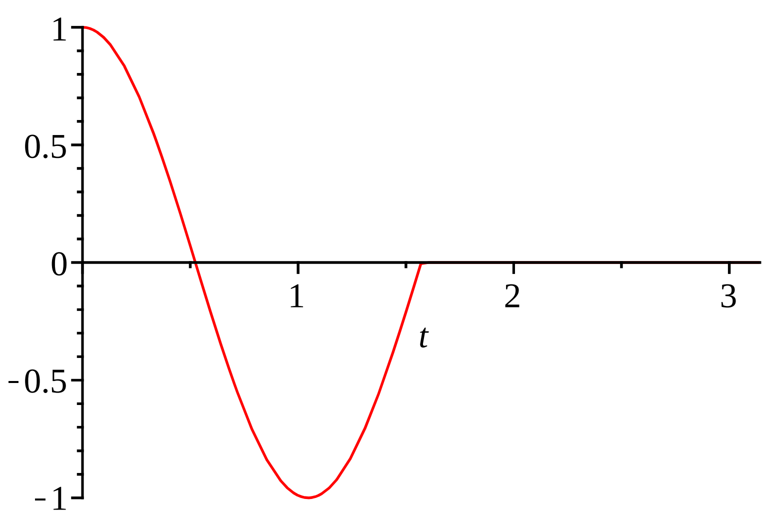
> $TransLapSolucion := isolate(TransLapEcuacion, laplace(x(t), t, s));$

$$TransLapSolucion := laplace(x(t), t, s) = \frac{-3\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\, s\,\pi} + s}{s^2 + 9} \quad \mathbf{(49)}$$

> $Solucion := invlaplace(TransLapSolucion, s, t);$

$$Solucion := x(t) = -\mathrm{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2}\,\pi\right)\cos(3\,t) + \cos(3\,t) \quad \mathbf{(50)}$$

> $plot(rhs(Solucion), t = 0..\mathrm{Pi});$



>

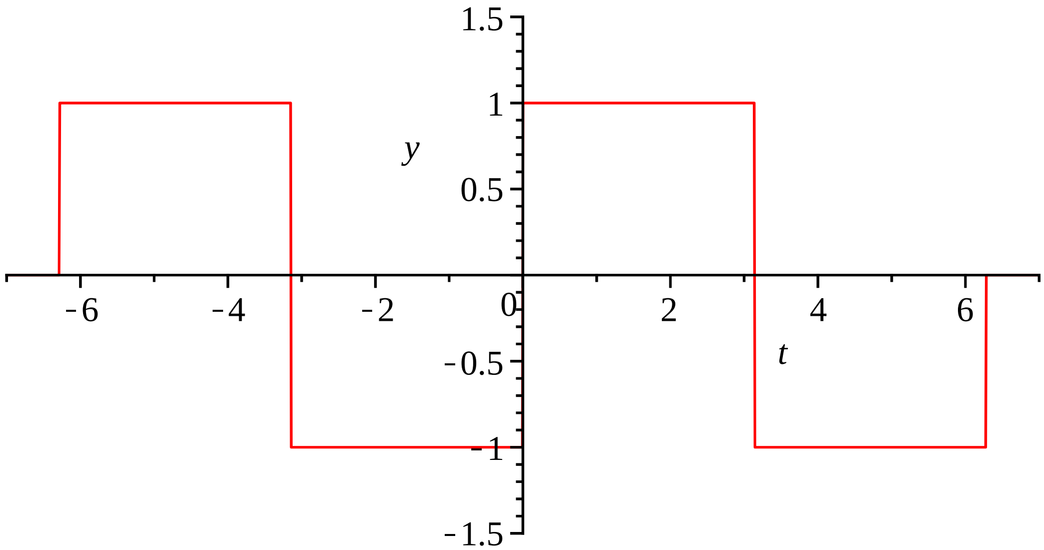
FIN RESPUESTA 6)

> *restart*

7) Obtenga los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier de la función que se muestra en la figura en el intervalo [-2*Pi..2*Pi]

> $f(t) := \mathrm{Heaviside}(t + 2\cdot\mathrm{Pi}) - 2\cdot\mathrm{Heaviside}(t + \mathrm{Pi}) + 2\cdot\mathrm{Heaviside}(t) - 2\cdot\mathrm{Heaviside}(t - \mathrm{Pi})$

$+ \text{Heaviside}(t - 2\cdot\text{Pi}) : plot(f(t), t = -7..7, y = -1.5..1.5)$



>

RESPUESTA 7)

> $L := 2\cdot\text{Pi};$

$$L := 2\,\pi \quad (51)$$

como es una función impar, entonces las Serie Trigonométrica será la SENO

> $a_0 := \left(\frac{1}{L}\right)\cdot int(f(t), t = -L..L);\ C := \frac{a_0}{2};$

$$a_0 := 0$$

$$C := 0 \quad (52)$$

> $a_n := \left(\frac{1}{L}\right)\cdot int\left(f(t)\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\text{Pi}\cdot t}{L}\right), t = -L..L\right);$

$$a_n := 0 \quad (53)$$

> $b_n := \left(\frac{1}{L}\right)\cdot int\left(f(t)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\text{Pi}\cdot t}{L}\right), t = -L..L\right);$

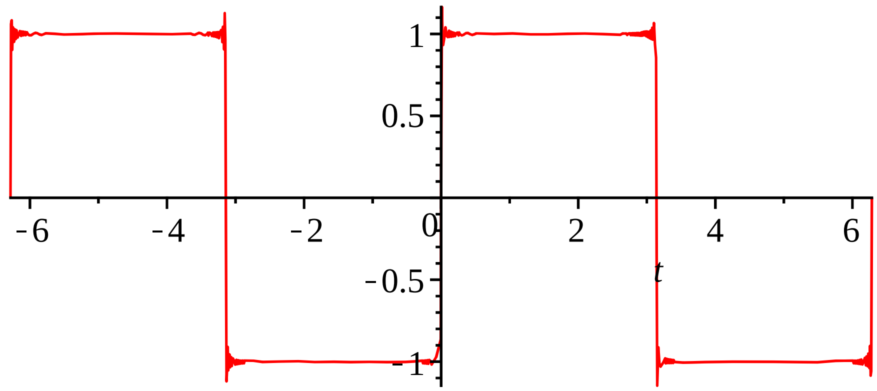
$$b_n := \frac{1}{2}\,\frac{4\cos(n\,\pi) - 8\cos\left(\frac{1}{2}\,n\,\pi\right) + 4}{\pi\,n} \quad (54)$$

> $STF := Sum\left(b_n\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\text{Pi}\cdot t}{L}\right), n = 1..infinity\right)$

$$STF := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\,\frac{\left(4\cos(n\,\pi) - 8\cos\left(\frac{1}{2}\,n\,\pi\right) + 4\right)\sin\left(\frac{1}{2}\,n\,t\right)}{\pi\,n} \quad (55)$$

> $STF_{500} := sum\left(b_n\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\text{Pi}\cdot t}{L}\right), n = 1..500\right) :$

> $plot(STF_{500}, t = -L..L)$



>

FIN RESPUESTA 7)

> *restart*

FIN EXAMEN

>

>