>

SOLUCION

FACULTAD DE INGENIERÍA
ECUACIONES DIFERENCIALES
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (CAPÍTULO 1)

2012 OCTUBRE 29

>

1) (35/100 puntos) DÉ LA CLASIFICACIÓN (ordinaria o derivadas parciales, orden, grado, lineal o no lineal) (7 puntos) DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL CON SU SOLUCIÓN GENERAL:

$$Ecuacion := \left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)^3 - 4\,x\,y(x)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + 8\,y(x)^2 = 0$$

$$SolucionGeneral := y(x) = \frac{x^2}{C_1} - \frac{2\,x}{C_1^2} + \frac{1}{C_1^3} \qquad \mathbf{(1)}$$

E INDIQUE CUÁLES DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES SON SOLUCIÓN Y DE QUÉ TIPO (particular o singular) Y CUÁLES NO LO SON, ARGUMENTANDO CADA RESULTADO
(4 puntos cada respuesta correcta menos 2 puntos menos cada respuesta incorrecta)

$$funcion_1 := y(x) = 8\,x^2 + 128\,x + 512$$

$$funcion_2 := y(x) = 8\,x^2 - 128\,x + 512$$

$$funcion_3 := y(x) = -4\,x^2 - 32\,x - 64$$

$$funcion_4 := y(x) = 4\,x^2 + 32\,x + 64$$

$$funcion_5 := y(x) = \frac{27}{4}\,x^3$$

$$funcion_6 := y(x) = -\frac{4}{27}\,x^3$$

$$funcion_7 := y(x) = \frac{4}{27}\,x^3 \qquad \mathbf{(2)}$$

> *restart*

RESPUESTA 1)

> $Ecuacion := \left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)^3 - 4\,x\,y(x)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + 8\,y(x)^2 = 0;\ SolucionGeneral := y(x) = \frac{x^2}{C_1} - \frac{2\,x}{C_1^2} + \frac{1}{C_1^3};$

$$Ecuacion := \left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)^3 - 4\,x\,y(x)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + 8\,y(x)^2 = 0$$

$$SolucionGeneral := y(x) = \frac{x^2}{C_1} - \frac{2\,x}{C_1^2} + \frac{1}{C_1^3} \qquad \mathbf{(3)}$$

> $Comprobacion_0 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(SolucionGeneral), Ecuacion)))$

$$Comprobacion_0 := 0 = 0 \qquad \mathbf{(4)}$$

SE COMPRUEBA QUE LA SOLUCIÓN GENERAL SÍ SATISFACE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL.

> $funcion_1 := y(x) = 8\,x^2 + 128\,x + 512$

$$funcion_1 := y(x) = 8\,x^2 + 128\,x + 512 \qquad \mathbf{(5)}$$

> $Comprobacion_1 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_1), Ecuacion)))$

$$Comprobacion_1 := 8192\,x^3 + 196608\,x^2 + 1572864\,x + 4194304 = 0 \quad \textbf{(6)}$$

LA funcion_1 NO ES SOLUCIÓN.

> $funcion_2 := y(x) = 8\,x^2 - 128\,x + 512$

$$funcion_2 := y(x) = 8\,x^2 - 128\,x + 512 \quad \textbf{(7)}$$

> $Comprobacion_2 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_2), Ecuacion)))$

$$Comprobacion_2 := 0 = 0 \quad \textbf{(8)}$$

> $Comprobacion_{20} := simplify(solve(rhs(funcion_2) = rhs(SolucionGeneral), C_1))$

$$Comprobacion_{20} := \frac{1}{8} \quad \textbf{(9)}$$

LA funcion_2 *ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR PARA* $C_1 = \frac{1}{8}$

> $funcion_3 := y(x) = -4\,x^2 - 32\,x - 64$

$$funcion_3 := y(x) = -4\,x^2 - 32\,x - 64 \quad \textbf{(10)}$$

> $Comprobacion_3 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_3), Ecuacion)))$

$$Comprobacion_3 := 0 = 0 \quad \textbf{(11)}$$

> $Comprobacion_{30} := simplify(solve(rhs(funcion_3) = rhs(SolucionGeneral), C_1))$

$$Comprobacion_{30} := -\frac{1}{4} \quad \textbf{(12)}$$

LA funcion_3 *ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR PARA* $C_1 = -\frac{1}{4}$

> $funcion_4 := y(x) = 4\,x^2 + 32\,x + 64$

$$funcion_4 := y(x) = 4\,x^2 + 32\,x + 64 \quad \textbf{(13)}$$

> $Comprobacion_4 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_4), Ecuacion)))$

$$Comprobacion_4 := 1024\,x^3 + 12288\,x^2 + 49152\,x + 65536 = 0 \quad \textbf{(14)}$$

LA funcion_4 NO ES SOLUCIÓN.

> $funcion_5 := y(x) = \frac{27}{4}\,x^3$

$$funcion_5 := y(x) = \frac{27}{4}\,x^3 \quad \textbf{(15)}$$

> $Comprobacion_5 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_5), Ecuacion)))$

$$Comprobacion_5 := \frac{519777}{64}\,x^6 = 0 \quad \textbf{(16)}$$

LA funcion_5 NO ES SOLUCIÓN.

> $funcion_6 := y(x) = -\frac{4}{27}\,x^3$

$$funcion_6 := y(x) = -\frac{4}{27}\,x^3 \quad \textbf{(17)}$$

> $Comprobacion_6 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_6), Ecuacion)))$

$$Comprobacion_6 := -\frac{128}{729}\, x^6 = 0 \tag{18}$$

LA funcion_6 NO ES SOLUCIÓN.

> $funcion_7 := y(x) = \frac{4}{27}\, x^3$ PARA

$$funcion_7 := y(x) = \frac{4}{27}\, x^3 \tag{19}$$

> $Comprobacion_7 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_7), Ecuacion)))$

$$Comprobacion_7 := 0 = 0 \tag{20}$$

> $Comprobacion_{70} := solve(rhs(funcion_7) = rhs(SolucionGeneral), C_1)$

$$Comprobacion_{70} := \frac{3}{4\, x}, \frac{3}{x}, \frac{3}{x} \tag{21}$$

LA funcion_7 ES UNA SOLUCIÓN SINGULAR DADO QUE NO HAY VALOR REAL PARA C_1

>

FIN RESPUESTA 1)

> restart

2) ((15/100 puntos) DADA LA SIGUIENTE SOLUCIÓN GENERAL, OBTENGA SU ECUACIÓN DIFERENCIAL CORRESPONDIENTE :

$$y(x) = e^{2x} \left(\_C1 + 9\, x - 9\, x^2 + \_C2 \cos(3\, x) + \_C3 \sin(3\, x)\right) \tag{22}$$

> restart

RESPUESTA 2)

> $SolucionGeneral := y(x) = e^{2x} \left(\_C1 + 9\, x - 9\, x^2 + \_C2 \cos(3\, x) + \_C3 \sin(3\, x)\right)$

$$SolucionGeneral := y(x) = e^{2x} \left(\_C1 + 9\, x - 9\, x^2 + \_C2 \cos(3\, x) + \_C3 \sin(3\, x)\right) \tag{23}$$

> $SolucionHomogenea := y(x) = e^{2x} (\_C1 + \_C2 \cos(3\, x) + \_C3 \sin(3\, x))$

$$SolucionHomogenea := y(x) = e^{2x} (\_C1 + \_C2 \cos(3\, x) + \_C3 \sin(3\, x)) \tag{24}$$

> $SolucionParticular := y(x) = e^{2x} \left(9\, x - 9\, x^2\right)$

$$SolucionParticular := y(x) = e^{2x} \left(9\, x - 9\, x^2\right) \tag{25}$$

OPCIÓN a)

> $EcuacionCaracteristica := expand((m-2) \cdot (m - 2 - 3\, I) \cdot (m - 2 + 3 \cdot I)) = 0$

$$EcuacionCaracteristica := m^3 - 6\, m^2 - 26 + 21\, m = 0 \tag{26}$$

> $EcuacionHomogeneaUno := diff(y(x), x\$3) - 6\, diff(y(x), x\$2) + 21 \cdot diff(y(x), x) - 26 \cdot y(x) = 0$

$$EcuacionHomogeneaUno := \frac{d^3}{dx^3}\, y(x) - 6 \left(\frac{d^2}{dx^2}\, y(x)\right) + 21 \left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) - 26\, y(x) = 0 \tag{27}$$

OPCIÓN b)

> $Sistema := diff(SolucionHomogenea, x), diff(SolucionHomogenea, x\$2), diff(SolucionHomogenea, x\$3) : Sistema_1; Sistema_2; Sistema_3;$

$$\frac{d}{dx}\, y(x) = 2\, e^{2x} (\_C1 + \_C2 \cos(3\, x) + \_C3 \sin(3\, x)) + e^{2x} (-3\, \_C2 \sin(3\, x) + 3\, \_C3 \cos(3\, x))$$

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)=4e^{2x}(\_C1+\_C2\cos(3x)+\_C3\sin(3x))+4e^{2x}(-3\_C2\sin(3x)+3\_C3\cos(3x))+e^{2x}(-9\_C2\cos(3x)-9\_C3\sin(3x))$$

$$\frac{d^3}{dx^3}y(x)=8e^{2x}(\_C1+\_C2\cos(3x)+\_C3\sin(3x))+12e^{2x}(-3\_C2\sin(3x)+3\_C3\cos(3x))+6e^{2x}(-9\_C2\cos(3x)-9\_C3\sin(3x))+e^{2x}(27\_C2\sin(3x)-27\_C3\cos(3x)) \quad (28)$$

> $Parametro := solve(\{Sistema\}, \{\_C1, \_C2, \_C3\}) :$

_C

> $EcuacionDos := simplify\left(subs\left(\_C1 = rhs\left(Parametro_1\right), \_C2 = rhs\left(Parametro_2\right), \_C3 = rhs\left(Parametro_3\right), SolucionHomogenea\right)\right)$

$$EcuacionDos := y(x) = \frac{21}{26}\frac{d}{dx}y(x)+\frac{1}{26}\frac{d^3}{dx^3}y(x)-\frac{3}{13}\frac{d^2}{dx^2}y(x) \quad (29)$$

> $EcuacionHomogeneaDos := rhs(EcuacionDos)\cdot 26 - lhs(EcuacionDos)\cdot 26 = 0$

$$EcuacionHomogeneaDos := \frac{d^3}{dx^3}y(x)-6\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right)+21\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)-26\,y(x)=0 \quad (30)$$

> $Q := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(SolucionParticular), lhs(EcuacionHomogeneaUno))))$

$$Q := -81(-1+2x)e^{2x} \quad (31)$$

> $EcuacionNoHomogenea := lhs(EcuacionHomogeneaUno) = expand(Q)$

$$EcuacionNoHomogenea := \frac{d^3}{dx^3}y(x)-6\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right)+21\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)-26\,y(x)=81\left(e^x\right)^2-162\left(e^x\right)^2x \quad (32)$$

COMPROBACION

> $SolGral := simplify(dsolve(EcuacionNoHomogenea))$

$$SolGral := y(x) = e^{2x}\left(\_C1+9x-9x^2+\_C2\cos(3x)+\_C3\sin(3x)\right) \quad (33)$$

> $SolucionGeneral;$

$$y(x) = e^{2x}\left(\_C1+9x-9x^2+\_C2\cos(3x)+\_C3\sin(3x)\right) \quad (34)$$

FIN RESPUESTA 2)

>

> *restart*

3) (25/100 puntos) OBTENGA LA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL CON LA CONDICIÓN INICIAL DADA - UTILIZANDO EXCLUSIVAMENTE EL MÉTODO DE FACTOR INTEGRANTE - (no utilizar dsolve, ni exactsol, ni separablesol)

$$x+\sin(x)+\sin(y(x))+\cos(y(x))\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)=0$$

$$y(\pi)=\pi \quad (35)$$

> *restart*

RESPUESTA 3)

> $Ecuacion := x+\sin(x)+\sin(y(x))+\cos(y(x))\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)=0;$

$$Ecuacion := x+\sin(x)+\sin(y(x))+\cos(y(x))\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)=0 \quad (36)$$

> $Condicion := y(\pi) = \pi$

$$Condicion := y(\pi) = \pi \quad (37)$$

> $with(DEtools):$

> $FactInt := intfactor(Ecuacion)$

$$FactInt := e^{x} \quad (38)$$

> $M := x + \sin(x) + \sin(y); N := \cos(y)$

$$M := x + \sin(x) + \sin(y)$$
$$N := \cos(y) \quad (39)$$

> $Comprobacion_0 := simplify(diff(M, y) - diff(N, x)) \neq 0$

$$Comprobacion_0 := \cos(y) \neq 0 \quad (40)$$

> $MM := expand(FactInt \cdot M); NN := simplify(FactInt \cdot N)$

$$MM := e^{x} x + e^{x} \sin(x) + e^{x} \sin(y)$$
$$NN := e^{x} \cos(y) \quad (41)$$

> $Comprobacion_1 := simplify(diff(MM, y) - diff(NN, x)) = 0$

$$Comprobacion_1 := 0 = 0 \quad (42)$$

> $IntMMx := int(MM, x)$

$$IntMMx := e^{x} x - e^{x} - \frac{1}{2} e^{x} \cos(x) + \frac{1}{2} e^{x} \sin(x) + e^{x} \sin(y) \quad (43)$$

> $SolucionGeneral := IntMMx + int((NN - diff(IntMMx, y)), y) = C_1$

$$SolucionGeneral := e^{x} x - e^{x} - \frac{1}{2} e^{x} \cos(x) + \frac{1}{2} e^{x} \sin(x) + e^{x} \sin(y) = C_1 \quad (44)$$

> $Parametro := simplify(subs(x = \mathrm{Pi}, y = \mathrm{Pi}, SolucionGeneral))$

$$Parametro := \frac{1}{2} e^{\pi} (2\pi - 1) = C_1 \quad (45)$$

> $SolucionParticular := subs(C_1 = lhs(Parametro), SolucionGeneral)$

$$SolucionParticular := e^{x} x - e^{x} - \frac{1}{2} e^{x} \cos(x) + \frac{1}{2} e^{x} \sin(x) + e^{x} \sin(y) = \frac{1}{2} e^{\pi} (2\pi - 1) \quad (46)$$

FIN RESPUESTA 3)

> $restart$

4) (25/100 puntos) DADA LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL SIGUIENTE:

$$x \ln(x) \left(\frac{d}{dx} y(x)\right) - (1 + \ln(x)) y(x) + \frac{1}{2} \sqrt{x} (2 + \ln(x)) = 0 \quad (47)$$

a) OBTENGA SU SOLUCIÓN GENERAL (10 puntos)
b) REPRESENTE GRÁFICAMENTE (10 puntos), LA SOLUCIÓN PARTICULAR, PARA LA CONDICIÓN DADA, EN UN INTERVALO DESDE 1 < x < 2

$$y(2) = \sqrt{2} + 2 \ln(2) \quad (48)$$

c) CALCULE (5 puntos) EL VALOR DE LA INCÓGNITA - CON 15 CIFRAS SIGNIFICATIVAS - PARA:

$$x = 3$$
$$\_C1 = 5 \quad (49)$$

> $restart$

RESPUESTA 4)

> $Ecuacion := x \ln(x) \left(\frac{d}{dx} y(x)\right) - (1 + \ln(x)) y(x) + \frac{1}{2} \sqrt{x} (2 + \ln(x)) = 0$

$$Ecuacion := x \ln(x) \left(\frac{d}{dx} y(x)\right) - (1 + \ln(x))\, y(x) + \frac{1}{2} \sqrt{x}\, (2 + \ln(x)) = 0 \quad \textbf{(50)}$$

> $Condicion := y(2) = \sqrt{2} + 2 \ln(2)$

$$Condicion := y(2) = \sqrt{2} + 2 \ln(2) \quad \textbf{(51)}$$

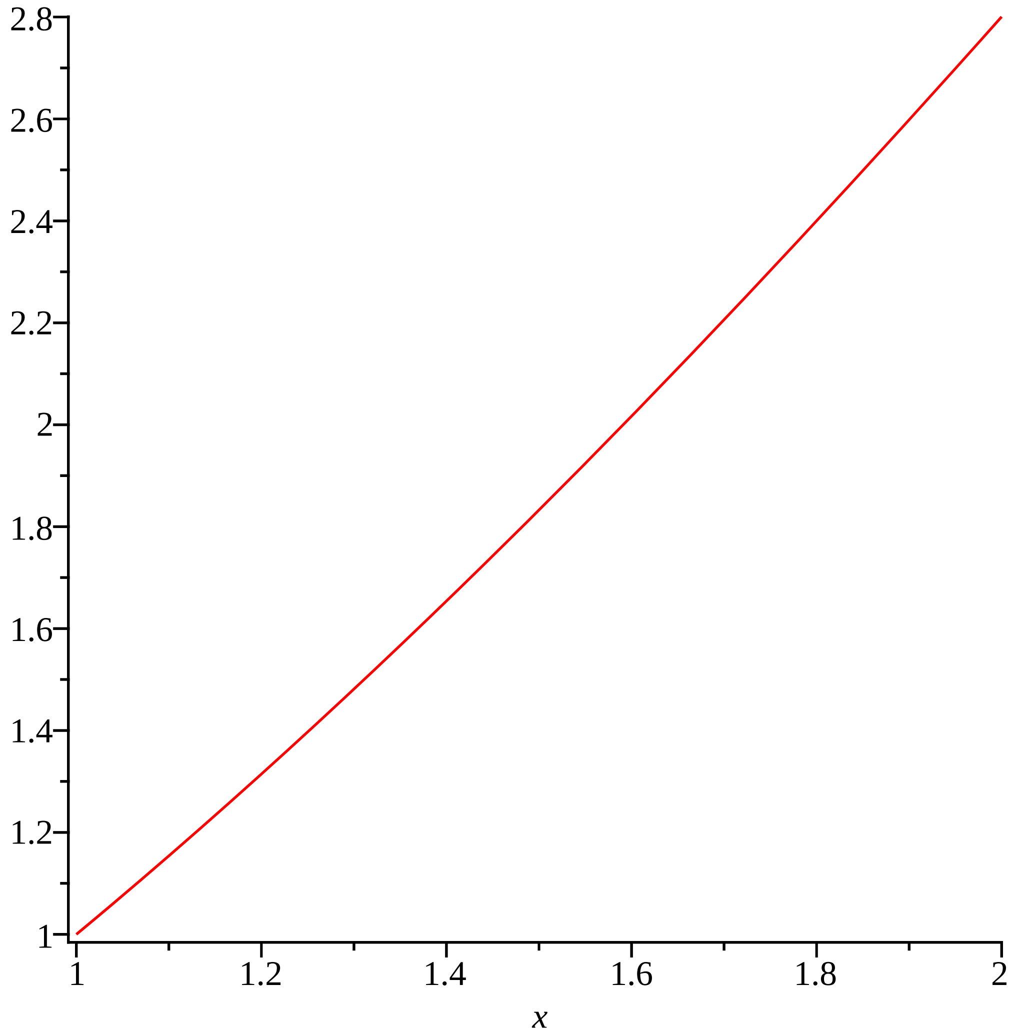
> $SolucionGeneral := dsolve(Ecuacion)$

$$SolucionGeneral := y(x) = \sqrt{x} + x \ln(x)\ \_C1 \quad \textbf{(52)}$$

> $SolucionParticular := dsolve(\{Ecuacion, Condicion\})$

$$SolucionParticular := y(x) = \sqrt{x} + x \ln(x) \quad \textbf{(53)}$$

> $plot(rhs(SolucionParticular), x = 1 ..2)$



> $ValorIncognita := evalf(rhs(subs(x = 3, \_C1 = 5, SolucionGeneral)), 15)$

$$ValorIncognita := 18.2112351375905 \quad \textbf{(54)}$$

> *restart*

FIN RESPUESTA 4)

> *restart*

FIN SOLUCION