>

**SOLUCIÓN**

FACULTAD DE INGENIERÍA
ECUACIONES DIFERENCIALES
PRIMER EXAMEN PARCIAL
SEMESTRE 2015-2

**23 MARZO 2015**

> *restart*

**1) (25/100)**
DADA LA SIGUIENTE **SOLUCIÓN GENERAL** DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DESCONOCIDA

> $y(x) = C_1 e^{-2x} \cos(2x) + C_2 e^{-2x} \sin(2x) + 5\cos(2x) + \sin(2x)$

$$y(x) = C_1 e^{-2x} \cos(2x) + C_2 e^{-2x} \sin(2x) + 5\cos(2x) + \sin(2x) \quad (1)$$

a) OBTENGA LA **SOLUCIÓN PARTICULAR** DADAS LAS CONDICIONES DE FRONTERA SIGUIENTES **(10 puntos)**

> $Condicion := y(0) = 4, y\left(\frac{\mathrm{Pi}}{4}\right) = 4 : Condicion_1; Condicion_2$

$$y(0) = 4$$

$$y\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 4 \quad (2)$$

>

**INICIA RESPUESTAS 1)**

> $SolucionGeneral := y(x) = C_1 e^{-2x} \cos(2x) + C_2 e^{-2x} \sin(2x) + 5\cos(2x) + \sin(2x)$

$$SolucionGeneral := y(x) = C_1 e^{-2x} \cos(2x) + C_2 e^{-2x} \sin(2x) + 5\cos(2x) + \sin(2x) \quad (3)$$

> $Condicion := y(0) = 4, y\left(\frac{\mathrm{Pi}}{4}\right) = 4 : Condicion_1; Condicion_2$

$$y(0) = 4$$

$$y\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 4 \quad (4)$$

> $Sistema := eval(subs(x = 0, rhs(SolucionGeneral) = rhs(Condicion_1))), eval\left(subs\left(x = \frac{\mathrm{Pi}}{4}, rhs(SolucionGeneral) = rhs(Condicion_2)\right)\right) : Sistema_1; Sistema_2$

$$C_1 + 5 = 4$$

$$1 + C_2 e^{-\frac{1}{2}\pi} = 4 \quad (5)$$

> $Parametro := simplify(solve(\{Sistema\}, \{C_1, C_2\})) : Parametro_1; Parametro_2$

$$C_1 = -1$$

$$C_2 = 3 e^{\frac{1}{2}\pi} \quad (6)$$

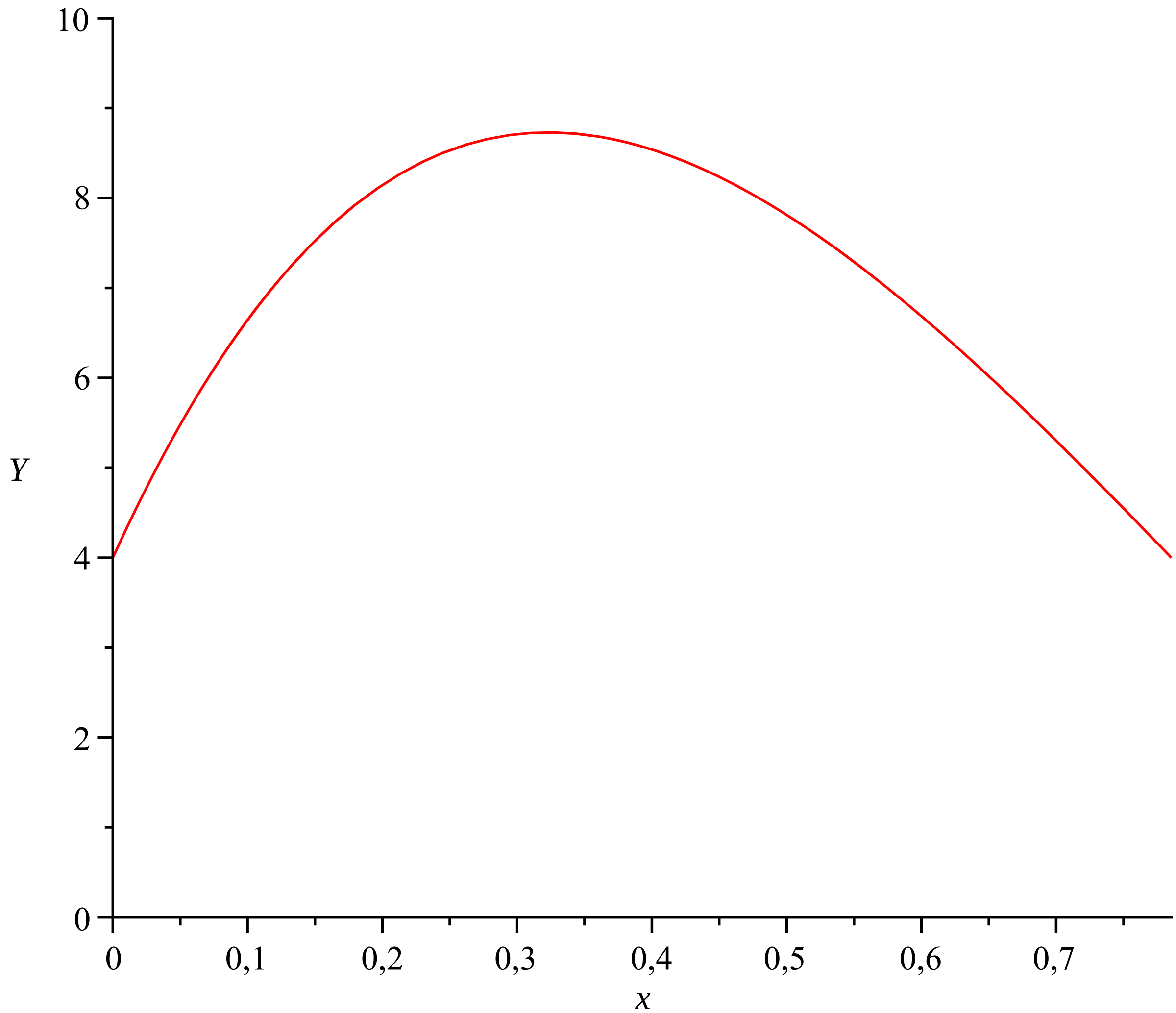
> $SolucionParticular := subs(C_1 = rhs(Parametro_1), C_2 = rhs(Parametro_2), SolucionGeneral)$

$$SolucionParticular := y(x) = -e^{-2x}\cos(2x) + 3\,e^{\frac{1}{2}\pi}\,e^{-2x}\sin(2x) + 5\cos(2x) + \sin(2x) \quad (7)$$

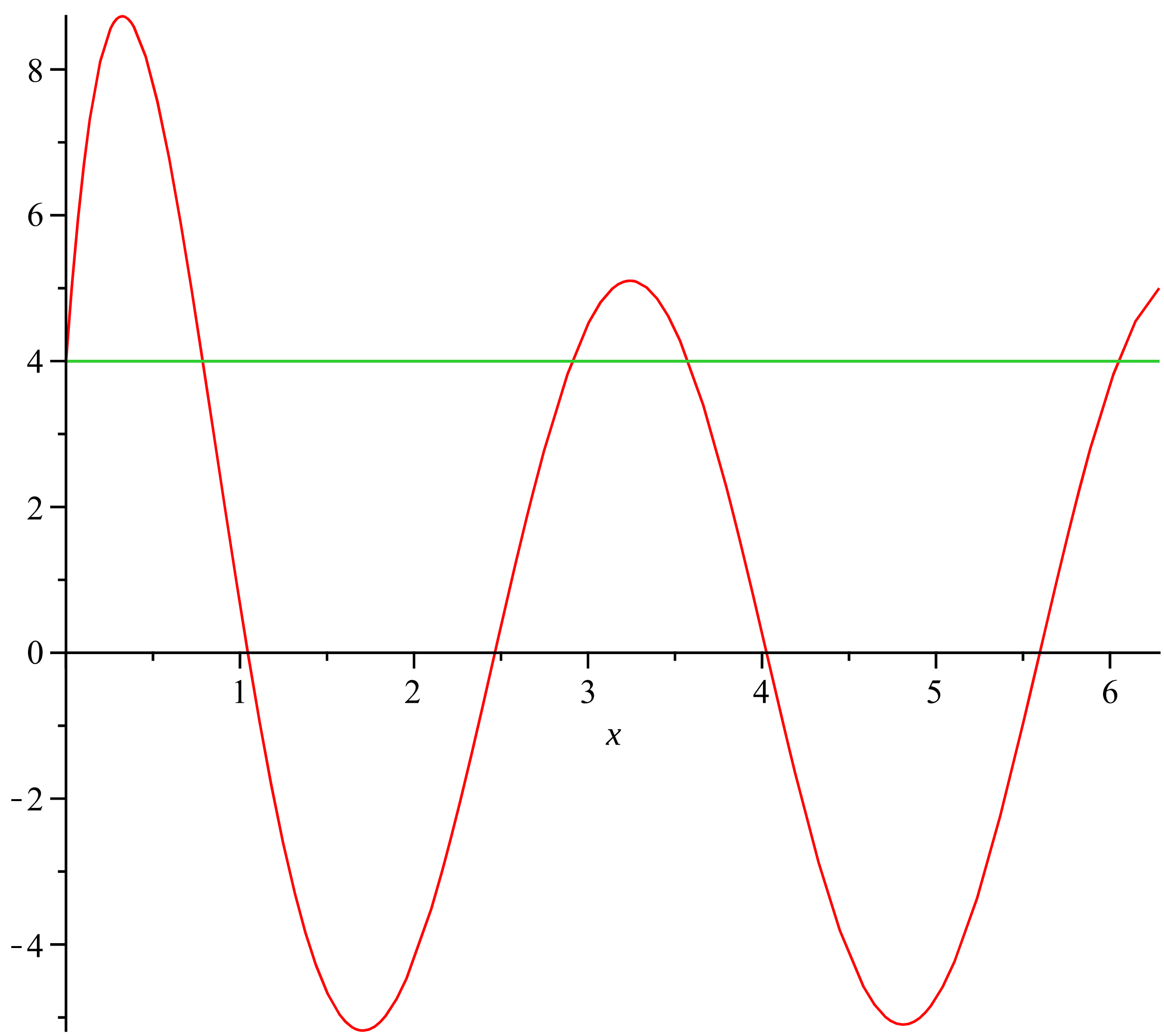
>

b) **GRAFIQUE** LA SOLUCION PARTICULAR OBTENIDA EN EL INCISO a) PARA EL INTERVALO DADO CON LAS CONDICIONES DE FRONTERA DEL MISMO INCISO. **(5 puntos)**

> $plot\left(rhs(SolucionParticular), x = 0..\frac{\text{Pi}}{4}, Y = 0..10\right)$




> $plot([rhs(SolucionParticular), 4], x = 0..2 \cdot \text{Pi})$




>

c) OBTENGA SU **ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA LINEAL** CORRESPONDIENTE Y **CLASIFÍQUELA** (por tipo de coeficientes y tipo de homogeneidad). **(10 puntos)**

> *SolucionGeneral*

$$y(x) = C_1 e^{-2x} \cos(2x) + C_2 e^{-2x} \sin(2x) + 5\cos(2x) + \sin(2x) \quad \textbf{(8)}$$

> $SolucionHomogenea := y(x) = C_1 e^{-2x}\cos(2x) + C_2 e^{-2x}\sin(2x)$

$$SolucionHomogenea := y(x) = C_1 e^{-2x} \cos(2x) + C_2 e^{-2x} \sin(2x) \quad \textbf{(9)}$$

> $SolucionParticular := y(x) = 5\cos(2x) + \sin(2x)$

$$SolucionParticular := y(x) = 5\cos(2x) + \sin(2x) \quad \textbf{(10)}$$

> $EcuacionCaracteristica := expand((m - (-2 + 2\cdot I))\cdot(m - (-2 - 2\cdot I))) = 0$

$$EcuacionCaracteristica := m^2 + 4m + 8 = 0 \quad \textbf{(11)}$$

> $EcuacionHomogenea := y'' + 4\cdot y' + 8\cdot y = 0$

$$EcuacionHomogenea := \frac{d^2}{dx^2} y(x) + 4\left(\frac{d}{dx} y(x)\right) + 8\, y(x) = 0 \quad \textbf{(12)}$$

> $Q := eval(subs(y(x) = rhs(SolucionParticular), lhs(EcuacionHomogenea)))$

$$Q := 28\cos(2x) - 36\sin(2x) \quad \textbf{(13)}$$

> $EcuacionFinal := lhs(EcuacionHomogenea) = Q$

$$EcuacionFinal := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) + 4\left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) + 8\, y(x) = 28\cos(2\,x) - 36\sin(2\,x) \tag{14}$$

>

**comprobacion**

> $SolGral := simplify(dsolve(EcuacionFinal))$

$$SolGral := y(x) = e^{-2\,x}\sin(2\,x)\, \_C2 + e^{-2\,x}\cos(2\,x)\, \_C1 + 5\cos(2\,x) + \sin(2\,x) \tag{15}$$

> $SolucionGeneral$

$$y(x) = C_1\, e^{-2\,x}\cos(2\,x) + C_2\, e^{-2\,x}\sin(2\,x) + 5\cos(2\,x) + \sin(2\,x) \tag{16}$$

>

**FIN RESPUESTAS 1)**

> $restart$

**2) (25/100)**

OBTENER LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN **(SIN UTILIZAR dsolve)**

> $\frac{d}{dt}\, x(t) + x(t)\cdot\cos(t) = \sin(t)\cdot\cos(t)$

$$\frac{d}{dt}\, x(t) + x(t)\cos(t) = \sin(t)\cos(t) \tag{17}$$

>

**INICIA RESPUESTA 2)**

> $Ecuacion := \frac{d}{dt}\, x(t) + x(t)\cos(t) = \sin(t)\cos(t)$

$$Ecuacion := \frac{d}{dt}\, x(t) + x(t)\cos(t) = \sin(t)\cos(t) \tag{18}$$

> $p := \cos(t);\ q := rhs(Ecuacion)$

$$p := \cos(t)$$

$$q := \sin(t)\cos(t) \tag{19}$$

> $IntP := int(p, t)$

$$IntP := \sin(t) \tag{20}$$

> $IntPneg := int(-p, t)$

$$IntPneg := -\sin(t) \tag{21}$$

> $SolucionGeneral := y(t) = expand\big(C_1\cdot\exp(IntPneg) + \exp(IntPneg)\cdot int(\exp(IntP)\cdot q, t)\big)$

$$SolucionGeneral := y(t) = \frac{C_1}{e^{\sin(t)}} + \sin(t) - 1 \tag{22}$$

>

**comprobacion**

> $SolGral := dsolve(Ecuacion)$

$$SolGral := x(t) = \sin(t) - 1 + e^{-\sin(t)}\, \_C1 \tag{23}$$

>

**FIN RESPUESTA 2)**

> $restart$

**3) (20/100)**

OBTENER LA MATRIZ **A** DE COEFICIENTES CONSTANTES CUYA MATRIZ EXPONENCIAL ESTÁ DADA POR LA SIGUIENTE EXPRESIÓN

> $MatrizExponencial := array([[1,0],[0,1]])\cdot\exp(t)\cdot\cos(3\cdot t) + array([[0,1],[-1,0]])\cdot\exp(t)\cdot\sin(3\cdot t)$

$$MatrizExponencial := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{t}\cos(3\,t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} e^{t}\sin(3\,t) \quad \textbf{(24)}$$

>

**INICIA RESPUESTA 3)**

> $MatrizExponencial := array([[1,0],[0,1]])\cdot\exp(t)\cdot\cos(3\cdot t) + array([[0,1],[-1,0]])\cdot\exp(t)\cdot\sin(3\cdot t)$

$$MatrizExponencial := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{t}\cos(3\,t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} e^{t}\sin(3\,t) \quad \textbf{(25)}$$

> $with(linalg):$

> $DerMatExp := map(diff, MatrizExponencial, t)$

$$DerMatExp := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{t}\cos(3\,t) - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{t}\sin(3\,t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} e^{t}\sin(3\,t) + 3\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} e^{t}\cos(3\,t) \quad \textbf{(26)}$$

> $AA := evalm(map(rcurry(eval, t='0'), DerMatExp))$

$$AA := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(27)}$$

>

**FIN RESPUESTA 3)**

> $restart$

**4) (30/100)**

**a)** UTILIZANDO EL MÉTODO DE MATRIZ EXPONENCIAL, OBTENER LA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL SIGUIENTE SISTEMA CON LAS CONDICIONES: x(0) = -1 y(0) = 1 z(0) = 2 **(20 puntos)**

> $\frac{d}{dt}x(t) = x(t)+y(t)+z(t)+t^2e^t;\ \frac{d}{dt}y(t) = x(t)+y(t)+z(t)+t\,e^t;\ \frac{d}{dt}z(t) = x(t)+y(t)+z(t)+e^t$

$$\frac{d}{dt}x(t) = x(t)+y(t)+z(t)+t^2e^t$$
$$\frac{d}{dt}y(t) = x(t)+y(t)+z(t)+t\,e^t$$
$$\frac{d}{dt}z(t) = x(t)+y(t)+z(t)+e^t \quad \textbf{(28)}$$

> $Sistema := \frac{d}{dt}x(t) = x(t)+y(t)+z(t)+t^2e^t, \frac{d}{dt}y(t) = x(t)+y(t)+z(t)+t\,e^t, \frac{d}{dt}z(t) = x(t)+y(t)+z(t)+e^t : Condiciones := x(0)=-1, y(0)=1, z(0)=2 :$

**INICIA RESPUESTA 4)**

> $AA := array([[1, 1, 1], [1, 1, 1], [1, 1, 1]])$

$$AA := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(29)}$$

> $BBtau := array([\tau\cdot\cdot 2\cdot\exp(\tau), \tau\cdot\exp(\tau), \exp(\tau)])$

$$BBtau := \begin{bmatrix} \tau^2 e^{\tau} & \tau e^{\tau} & e^{\tau} \end{bmatrix} \quad \textbf{(30)}$$

> $Xcero := array([-1, 1, 2])$

$$Xcero := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(31)}$$

> $with(linalg):$

> $MatExp := exponential(AA, t)$

$$MatExp := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{3t} & \frac{1}{3} e^{3t} - \frac{1}{3} & \frac{1}{3} e^{3t} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} e^{3t} - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{3t} & \frac{1}{3} e^{3t} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} e^{3t} - \frac{1}{3} & \frac{1}{3} e^{3t} - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{3t} \end{bmatrix} \quad \textbf{(32)}$$

> $MatExpTau := exponential(AA, t - \tau)$

$$MatExpTau := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{3t-3\tau} & \frac{1}{3} e^{3t-3\tau} - \frac{1}{3} & \frac{1}{3} e^{3t-3\tau} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} e^{3t-3\tau} - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{3t-3\tau} & \frac{1}{3} e^{3t-3\tau} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} e^{3t-3\tau} - \frac{1}{3} & \frac{1}{3} e^{3t-3\tau} - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{3t-3\tau} \end{bmatrix} \quad \textbf{(33)}$$

> $MatBBtau := simplify(evalm(MatExpTau \&* BBtau)) : MatBBtau_1; MatBBtau_2; MatBBtau_3$

$$\frac{2}{3} \tau^2 e^{\tau} + \frac{1}{3} \tau^2 e^{-2\tau+3t} + \frac{1}{3} \tau e^{-2\tau+3t} - \frac{1}{3} \tau e^{\tau} + \frac{1}{3} e^{-2\tau+3t} - \frac{1}{3} e^{\tau}$$

$$\frac{1}{3} \tau^2 e^{-2\tau+3t} - \frac{1}{3} \tau^2 e^{\tau} + \frac{2}{3} \tau e^{\tau} + \frac{1}{3} \tau e^{-2\tau+3t} + \frac{1}{3} e^{-2\tau+3t} - \frac{1}{3} e^{\tau}$$

$$\frac{1}{3} \tau^2 e^{-2\tau+3t} - \frac{1}{3} \tau^2 e^{\tau} + \frac{1}{3} \tau e^{-2\tau+3t} - \frac{1}{3} \tau e^{\tau} + \frac{2}{3} e^{\tau} + \frac{1}{3} e^{-2\tau+3t} \quad \textbf{(34)}$$

> $IntTau := map(int, MatBBtau, \tau = 0..t) : IntTau_1; IntTau_2; IntTau_3$

$$-\frac{4}{3} + \frac{1}{3} e^{3t} + \frac{1}{2} e^{t} t^2 - 2 e^{t} t + e^{t}$$

$$\frac{5}{3} + \frac{1}{3} e^{3t} - \frac{1}{2} e^{t} t^2 + e^{t} t - 2 e^{t}$$

$$\frac{1}{3} e^{3t} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} e^{t} t^2 \quad \textbf{(35)}$$

> $comprobacion_1 := map(rcurry(eval, t = '0'), IntTau)$

**(36)**

$$comprobacion_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

> $SOL := evalm(evalm(MatExp \,\&*\, Xcero) + IntTau) : xx(t) = SOL_1; yy(t) = SOL_2; zz(t) = SOL_3$

$$xx(t) = -3 + e^{3t} + \frac{1}{2} e^t t^2 - 2 e^t t + e^t$$

$$yy(t) = e^{3t} + 2 - \frac{1}{2} e^t t^2 + e^t t - 2 e^t$$

$$zz(t) = 1 + e^{3t} - \frac{1}{2} e^t t^2 \quad (37)$$

> $comprobacion_2 := map(rcurry(eval, t = '0'), SOL)$

$$comprobacion_2 := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

>

**comprobacion**

> $SOLUCION := dsolve(\{Sistema, Condiciones\}) : SOLUCION_1; SOLUCION_2; SOLUCION_3$

$$x(t) = -3 + e^{3t} + \frac{1}{2} e^t t^2 - 2 e^t t + e^t$$

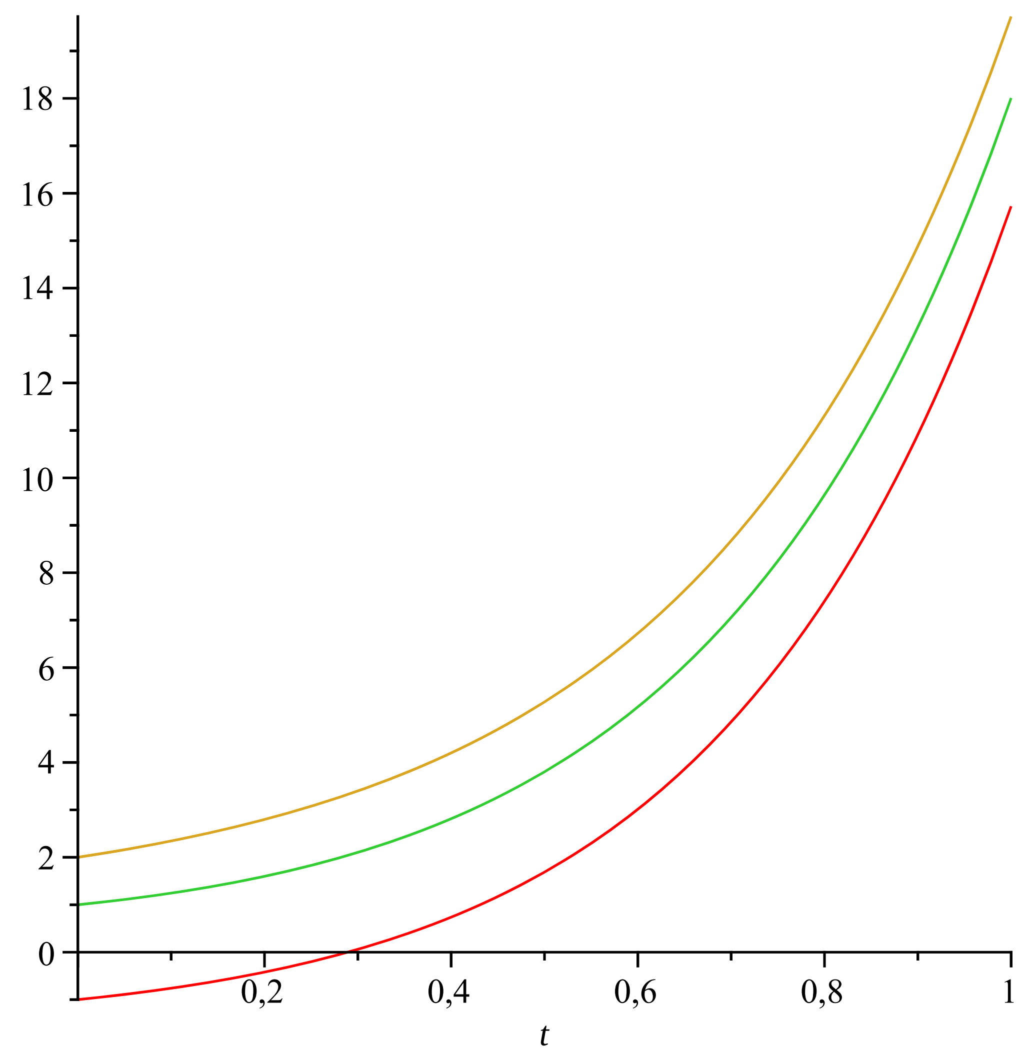
$$y(t) = e^{3t} + 2 - \frac{1}{2} e^t t^2 + e^t t - 2 e^t$$

$$z(t) = 1 + e^{3t} - \frac{1}{2} e^t t^2 \quad (39)$$

>

**b)** GRAFICAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA EN EL INCISO PREVIO PARA EL INTERVALO $0 < t < 1$ **(10 puntos)**

> $plot([SOL_1, SOL_2, SOL_3], t = 0..1)$




>

**FIN RESPUESTA 4)**

> *restart*

**FIN DEL EXAMEN**

>